Der

Anfangs-Gründe aller Mathematischen Wissenschaften

Letzter Theil,

Welcher so wohl die gemeine

Algebra, als die Differential- und Integral-Rechnung, und einen Anhang

von den vornehmsten

Mathematischen Schriften

in sich begreift,

Und zu mehrerem Aufnehmen der Mathematick so wohl auf hohen, als niedrigen Schulen, aufgesetzt worden

Von

Christian Freyherrn von Wolff,

Seiner Königl. Majestät in Preussen Geheimen Rathe und Cantzler der Universität Halle, wie auch Professore Juris Naturæ & Gentium ac Matheseos daselbst, Professore honorario zu St. Petersburg, der Königl. Academie der Wissenschaften zu Paris, wie auch der Königl. Groß-Brittannischen und der Königl. Preußl. Societät der Wissenschaften Mitgliede.

Neue, verbesserte und vermehrte Auflage.

Halle im Magdeburgischen,
Zu finden in der Rengerischen Buchhandlung.
1750.

Anfangs-Gründe

sowohl der gemeinen

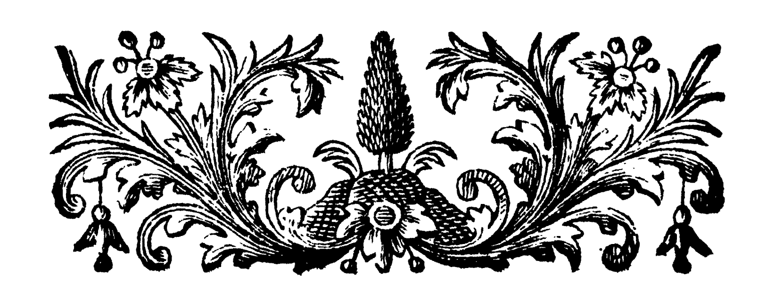
Algebra,

als der

Differential-

und

Integral-Rechnung.



Vorrede.

Geehrter Leser,

Die Algebra kan niemals zuviel gerühmt werden: denn sie ist eine Kunst, durch welche man mathematische Wahrheiten von sich selbst erfinden kan. Wenn ihr demnach die Anfangs-Gründe der mathematischen Wissenschaften, welche ich in den drey vorhergehenden Theilen erkläret habe, euch bekant machet und die Algebra dabey studiret; so werdet ihr aus jenen durch diese vor euch selbst finden können, was ihr sonst aus Büchern oder von andern zulernen von nöthen hättet. Ja ihr werdet auch vieles erfinden können, was andere vor euch noch nicht gedacht haben. Mit einem Worte, sie macht euch geschickt, daß, wenn ihr nur gantz was geringes aus den mathematischen Wissenschaften gelernet habt, ihr von euch selbst ein mehreres erfinden könnet, zu der Zeit,

Wissen-

wenn ihr es von nöthen habt. Es ist aber keine vollkommenere Art zu studiren, als wenn man nur weniges lernen darf, und sich dabey auf alle vorkommende Fälle geschickt macht. Ich sage aber noch mehr. Ihr treffet in der Algebra die allervollkommenste Manier zuraisonniren an. Denn sie stellet die Begriffe der Sachen durch Zeichen vor, und verwandelt die Schlüsse, welche mit vielem Bedachte aus ihnen hergeleitet werden, in eine leichte Manier, die Zeichen mit einander zuverknüpfen und von einander zutrennen. Dadurch erhält man öfters in einer Zeile mehr, als in großen Büchern nicht Raum finden würde. Durch das Anschauen weniger Zeichen werdet ihr öfters verständiger, als ihr durch vieler Jahre Arbeit nach der gemeinen Art zulernen und zudencken nicht werden könnet. In dieser Absicht pflegt man die Algebra den Gipfel menschlicher Wissenschaften zünennen. Ich habe demnach sowohl die gemeine Algebra, als die unvergleichliche Differential- und Integral-Rechnung des Herrn von Leibnitz dergestalt erklären wollen, daß nicht allein ihre Kunst-Griffe unvermerckt beygebracht, sondern auch die Haupt-Lehren von der so genannten Mathesi pura zugleich mit erlernet, ja von selbsten gefunden werden können.

An-

Anfangs-Gründe der Algebra.

Der erste Theil, von den Anfangs-Gründen der gemeinen Algebra.

Die 1. Erklärung.

1.

Die gemeine Algebra ist eine *Wissenschaft, aus einigen gegebenen endlichen Grössen, andere ihres gleichen, von welchen, in Ansehung der gegebenen etwas bekant gemacht wird, vermittelst gewisser Gleichungen zufinden.*

Die 1. Anmerckung.

2. Z. E. Ihr sollt zwo Zahlen finden, welche mit einander multipliciret, eine gegebene Zahl 60, hingegen zusammen addiret eine andere gegebene Zahl 16 bringen. Also werden euch gegebenen zwo Zahlen, und ihr sollet aus denselben zwo andere Zahlen finden, von welchen euch bekannt gemacht wird, daß ihre Summe der kleinern, ihr Product aber der grössern von den gegebenen Zahlen gleich seyn soll. Die Algebra nun lehret euch nicht allein in gegenwärtigem Falle die verlangten Zahlen, sondern auch eine allgemeine Regel finden, nach welcher ihr alle Exempel von dieser Art rechnen könnet.

Zusatz.

Zusatz.

3. Also ist die Algebra eine allgemeine Rechen-Kunst, durch welche man nemlich alles, was sich rechnen läßt, ausrechnen kan (§. 1 *Arithm.*).

Die 2. Anmerckung.

4. Daher nennet auch der grosse Mathematicus in Engelland, Herr Isaac Newton, seine Anweisung zur Algebra Arithmeticam Universalem, und wir können die Algebra in unserer Teutschen Sprache mit gutem Fuge eine Allrechen-Kunst heissen, zumal, wenn man die Buchstaben-Rechen-Kunst mit dazu nimt.

Die 2. Erklärung.

5. **Die Buchstaben Rechen-Kunst wird diejenige genennet, welche an statt der Ziffern, allgemeine Zeichen der Grössen braucht, und damit die gewöhnlichen Rechnungs-Arten verrichtet.**

Die 3. Erklärung.

6. **Eine Grösse nennen wir alles dasjenige, was sich vermehren oder vermindern läßt, in so weit es sich vermehren läßt.**

Der 1. Zusatz.

7. Also bestehet das Wesen einer Grösse in der Verhältniß zu einer andern ihres gleichen (§. 65 *Arithm.*).

Die 1. Anmerckung.

8. Z. E. Die Wärme nenne ich in so weit eine Grösse, als ich dencken kan, wie vielmal eine gegebene Wärme, als die Wärme der Luft des heutigen Tages,

Tages in einer andern gegebenen Wärme, als in der Wärme des gestrigen Tages enthalten sey.

Der 2. Zusatz.

9. Und folglich sind die Grössen undeterminirte Zahlen, da man nemlich noch kein gewisses Eins setzet (§. 5, 8 *Arithm.*).

Die 2. Anmerckung.

10. Nehmet z. E. eine gerade Linie von einer determinirten Länge. Setzet, die Linie sey eingetheilet in 4 gleiche Theile. Wenn ihr einen von denselben zur Eins machet, und die Länge der gantzen Linie mit ihm vergleichet: so heißt die Linie 4, und ihr betrachtet die Länge als eine Zahl. Setzet abermals, die Linie sey eingetheilet in 5 gleiche Theile. Wenn ihr einen davon zur Eins machet, und die Länge der gantzen Linie mit ihr vergleichet; so heißt die Linie 5, und ihr betrachtet ihre Länge abermals als eine Zahl. Wiederum setzet, die Linie sey eingetheilet in 13 gleiche Theile, und vergleichet ihre gantze Länge mit einem solchen Theile, so heißt sie 13, und ihr betrachtet dieselbe als eine Zahl. Hieraus sehet ihr, daß die Länge einer Linie durch unzehlich viel Zahlen große und kleine ausgesprochen werden kan, nachdem ihr nemlich einen großen oder kleinen Theil derselben zur Eins annehmet. Wenn ihr nun keinen gewissen Theil setzet, mit welchem sie verglichen werden soll; sondern sie nur überhaupt betrachtet, in so weit sie mit einer gewissen Eins kan verglichen werden: so stellet ihr euch dieselbe als eine Grösse vor. Und daher kommt es, daß durch die Buchstaben-Rechen-Kunst sehr allgemeine Wahrheiten erfunden werden: da hingegen die Rechen-Kunst nur eintzelne Exempel ausrechnet, und also stets mit eintzelnen Fällen zuthun hat.

Der 3. Zusatz.

11. Alles, was wir in der Welt antreffen und in uns selbst finden, hat in allem dem, was

was es würcklich ist, und wovon sich etwas gedencken läßt, seine Schrancken und läßt sich dannenhero mit andern Dingen von seiner Art vergleichen, und darum als etwas, welches vermehret oder vermindert werden kan, das ist, als eine Grösse (§. 6, 7) betrachten. Derowegen erstreckt sich die Buchstaben-Rechen-Kunst und Algebra auf alle endlichen Dinge, und führet uns auf einen deutlichen Begriff von ihrer Endlichkeit.

Die 3. Anmerckung.

12. Es kan keine vollkommenere Erkenntniß gedacht, noch verlanget werden, als wenn man von der Endlichkeit der Dinge einen deutlichen Begriff erlanget hat: welches ich bey anderer Gelegenheit klar und deutlich ausführen will. Daher dienet die Algebra, zu einer vollkommenen Erkenntniß der Dinge zugelangen, und ohne sie würde es in den meisten Fällen unmöglich gewesen seyn, selbige zuüberkommen.

Der 4. Zusatz.

13. Weil die Grössen undeterminirte Zahlen sind (§. 9), so kan man auch keine andern Veränderungen, als wie mit Zahlen, mit ihnen vornehmen, und daher sie entweder zusammen addiren, oder von einander subtrahiren, oder in einander multipliciren, oder durch einander dividiren (§. 13, 15, 18, 21, 24 *Arithm.*).

Die 4. Anmerckung.

14. Gleichwie ihr aber mit Zahlen keine Rechnung vornehmen könnet, ihr müsset euch vorher dieselben durch gewisse Zeichen vorstellen: eben so wird in der Algebra erfordert, daß ihr für die Grössen gewisse Zeichen ersinnet.

Der

Der 1. willkührliche Satz.

15. **Man benenne die gegebenen Grössen jederzeit mit den ersten Buchstaben des Alphabets, a, b, c, d u. s. w. die unbekanten aber, welche man sucht, mit den letzten, x, y, z.**

Die 1. Anmerckung.

16. Wie sich die Grössen dem Verstande zu erkennen geben, so müssen sie auch durch die Zeichen von einander unterschieden werden. Nun stellen sie sich in den algebraischen Aufgaben jederzeit dem Verstande vor, entweder als gegebene, das ist, bekant gemachte, oder als gesuchte, das ist, noch unbekante Grössen: Derowegen muß man auch durch die Zeichen unserer Einbildungs-Kraft diesen Unterscheid klärlich vorstellen. Denn sonst wäre Gefahr, daß man das Unbekante mit dem Bekanten verwechselte, und daher in Irrtum verfiele.

Die 2. Anmerckung.

17. Es wäre bey der Benennung der Grössen noch gar viel zuerinnern. Denn, wenn sie geschickt und zu dem Erfinden dienlich seyn soll, so müssen die Zeichen alle gegebene relationes der bedeuteten Dinge gegeneinander andeuten. Z. E. Wenn eine von den unbekanten Grössen dreymal so groß ist als die andere, und die kleinere heißt x; so nennet man die grössere lieber $3x$ als y. Allein, ich würde den Anfängern nicht dienen, wenn ich sie mit vielen Regeln auf einmal überhäufte. Und halte es dannenhero für rahtsamer, daß ich es inskünftige lieber durch Exempel lehre, und die Regeln nach und nach gleichsam unvermerckt und ohne Mühe beybringe.

Der 2. willkührliche Satz.

18. **Das Zeichen der Addition ist +, der Subtraction aber —. Jenes wird**

durch Mehr; dieses durch Weniger ausgesprochen.

Anmerckung.

19. Z. E. Die Summe zwoer Grössen a und b wird geschrieben a + b, und ausgesprochen: a mehr b. Hingegen die Differentz zwoer Grössen wird geschrieben durch a — b, und ausgesprochen: a weniger b. Als: es bedeute a 7 Thaler, b 8 Groschen; so bedeutet a + b 7 Thl. + 8 gl. das ist, 7 Thl. und 8 gl. hingegen a — b 7 Thl. — 8 gl. das ist, 7 Thl. weniger 8 gl.

Der 3. willkührliche Satz.

20. *Die Multiplication hat entweder gar kein Zeichen, sondern man setzt die Buchstaben, welche einander multipliciren, ohne einiges Zeichen neben einander: oder man deutet sie durch ein* Comma (,) *oder einen Punct* (.) *an. Insgemein braucht man dieses Zeichen* ⋊.

Anmerckung.

21. Wenn a durch b multiplicirt werden soll, so schreibet das Product ab, oder a, b oder a. b, oder a ⋊ b. Wir werden uns des letzten Zeichens niemals bedienen, weil es leicht mit dem X verwechselt wird. Doch haben wir es hiermit anführen wollen, weil es in allen Büchern häufig vorkommt. Am meisten werden wir kein Zeichen brauchen: das Comma und den Punct aber nur in gewissen Fällen aus besondern Ursachen, welche sich zu seiner Zeit in den Exempeln zeigen werden.

Der 4. willkührliche Satz.

22. *Wenn eine Grösse viele andere auf einmal multiplicirt, so schließt man sie in eine* parenthesin ( ) *ein, und setzt jene*

ohne

ohne einiges Zeichen vor oder hinter die parenthesin: oder man setzt zwischen dieselben ein blosses Comma.

Anmerckung.

23. Das Product von $a + b - c$ in d schreibet entweder also: $(a + b - c)d$, oder dergestalt: $d(a + b - c)$, oder auch folgender maßen: $a + b - c, d$. Insgemein schreibt man dieses Product also: $\overline{a + b - c} \times d$, oder auch $d \times \overline{a + b - c}$. Allein, wir bleiben billig bey der Manier des Herrn von Leibnitz, welche mit großem Vortheile in die Acta Eruditorum Lipsiensia eingeführet worden ist: denn, man kan sich nicht so leicht verirren, wie bey dem gemeinen Zeichen, und macht auch den Buchdruckern nicht so viel unnöthige Mühe, ersparet über dieses viel an dem Raume. Anderer Vortheile wollen wir jetzt nicht gedencken, welche sich im folgenden zeigen werden.

Der 5. willkührliche Satz.

24. Das Zeichen der Division sind zween Puncte :, oder man schreibt die Buchstaben, welche einander dividiren sollen, wie in der Rechen-Kunst einen Bruch.

Anmerckung.

25. Wenn a durch b dividirt werden soll, so schreibe man den Quotienten entweder $a:b$, oder $\frac{a}{b}$ und spreche es beyderseits aus: a durch b dividirt.

Der 6. willkührliche Satz.

26. Wenn eine Grösse viele andere auf einmal dividirt, oder viele andere eine

dividiren, so werden, wie in der Multiplication, die vielen in eine parenthesin ( ) eingeschlossen, oder man kann auch an deren statt ein Comma brauchen.

Anmerckung.

27. Wenn $a+b$ durch c dividirt werden soll, so schreibet den Quotienten entweder $(a+b):c$, oder $a+b,:c$. Sollet ihr a durch $b+c$ dividiren, so ist der Quotient $a:(b+c)$ oder $a,:b+c$. Wiederum, wenn ihr $a+b$ durch $c+d$ dividiret, so schreibet den Quotienten $(a+b):(c+d)$ oder $a+b,:,c+d$. Nach der gemeinen Art schreibet ihr diese Quotienten $\frac{a+b}{c}$, $\frac{a}{b+c}$, $\frac{a+b}{c+d}$, oder auch

$$\overline{a+b}:c,\quad a:\overline{b+c},\quad \overline{a+b}:\ \overline{c+d}.$$

Die 1. Aufgabe.

28. Einerley Grössen mit einerley und verschiedenen Zeichen zusammen zuaddiren.

Auflösung.

1. Wenn sie einerley Zeichen haben, so zehlet sie, wie in der Rechen-Kunst, zusammen.
2. Sind aber die Zeichen verschieden, so ziehet von der grössern die kleinere ab, und setzet zu dem, was überbleibt, das Zeichen der grössern.

Exempel.

$$\begin{array}{l} a+2b-3c-5d \\ 3a-2b+6c+2d \\ \hline 4a\qquad +3c-3d. \end{array}$$

Beweiß.

Weil die Buchstaben undeterminirte Zahlen sind (§. 9, 15); so könnet ihr einen jeden als Eins ansehen, und demnach die Grössen, welche durch einerley Buchstaben benennet werden, als Dinge von gleicher Art, zusammen zehlen (§. 8 *Arithm.*). Alle Grössen, welche mit dem Zeichen — bemerckt werden, fehlen, und hingegen die, welche das Zeichen + haben, sind vorhanden. Wenn ich derowegen von beyder Art addiren soll, so wird durch die letztern der Mangel aufgehoben, und muß freylich die Addition in eine Subtraction verkehret werden. W. Z. E. W.

Die 1. Anmerckung.

29. Die Grössen, welche mit dem Zeichen — bemercket werden, hat man nicht anders, als Schulden anzusehen, und hingegen die andern mit dem Zeichen + als baares Geld. Und daher nennet man auch die ersten weniger als nichts, weil man erst so viel weg geben muß, als man schuldig ist, ehe man nichts hat.

Die 2. Anmerckung.

30. Damit euch die Rechnung mit Buchstaben deutlicher werde, so bildet euch ein, a bedeute 1 thl. b 1 gl. c 1 pf.

$7a - 9b + 5c$	7 thl. — 9 gl. + 5 pf.
$3a + 5b - 9c$	3 thl. + 5 gl. — 9 pf.
$10a - 4b - 4c$	10 thl. — 4 gl. — 4 pf.

Die 2. Aufgabe.

31. **Einerley Grössen mit einerley oder verschiedenen Zeichen von einander zu subtrahiren.**

Auflösung.

1. Wenn einerley Zeichen sind, und ihr sollet das Kleinere von dem Grössern abziehen, so verrichtet die Subtraction, wie in Ziffern (§. 49 *Arithm.*).
2. Sollet ihr aber die grössere von der kleinern abziehen, so ziehet die kleinere von der grössern ab, und zu dem übrigen setzet das Zeichen —, wenn die Grössen + haben; hingegen +, wenn sie — haben.
3. Wenn die Zeichen verschieden sind, so addiret die Grössen, welche ihr von einander abziehen sollet, und zu der Summe setzet das Zeichen derjenigen Grösse, von welcher die Subtraction geschehen solte.

Exempel.

8a — 5c + 9d   8 thl. — 5 gl. + 9 pf
6a — 8c — 7d   6 thl. — 8 gl. — 7 pf.

2a + 3c + 16d   2 thl. + 3 gl. + 16 pf.

9b + 15c — 7d + 8e — f
6b + 20c — 9d — 9e + 7f

3b — 5c + 2d + 17e — 8f.

Oder, verwandelt die Zeichen in wiedrige von den Grössen, welche ihr abziehen sollet, und addiret sie zu den andern (§. 28).

Be-

Beweiß.

Weil ihr jeden Buchstaben als Eins ansehen könnet (§. 9, 15); so könnet ihr auch, wie in Zahlen, die Subtraction verrichten. Allein, wenn ihr die grössere von der kleinern abziehet, und sie haben das Zeichen +, als 20c von 15c, so nehmet ihr 20c weg, ihr müsset aber wieder von oben die 15c addiren, und dannenhero fehlen nur noch so viel c, als der Unterscheid zwischen 20 und 15 ist, nemlich 5. Hingegen wenn das Zeichen — ist, als wenn ihr — 9d von — 7d abziehen sollet; so müsset ihr — 9d addiren, weil ihr es zu viel abgezogen habt. Denn, ihr soltet 20c — 9d wegnehmen: ihr habt aber 20c gantz weggenommen. Da nun oben 7d fehlen, so heben sich von den 9d, welche ihr dazu addiret, 7 auf, und bleiben nur noch 2d übrig. Darum dürfet ihr in diesen Fällen nur allezeit die kleinere von der grössern abziehen, und zu dem übrigen das widrige Zeichen setzen, nemlich —, wenn ihr + habt, und +, wenn — ist. Endlich, wenn die Zeichen verschieden sind, und ihr sollet z. E. — 9e von + 8e abziehen; so wisset ihr aus dem vorhergehenden, daß die unteren 9e addirt werden müssen, weil ihr zu viel in dem vorhergehenden abgezogen habt. Und demnach bekommet ihr + 17e. Hingegen, wenn ihr z. E. + 7f von — f subtrahiren sollet; so fehlet euch schon ein f. Wenn ihr nun die 7f auch wegnehmen sollet, so fehlen

euch zusammen 8f. Daher habt ihr in beyden Fällen nur nöthig, die Grössen zu addiren, und zu der Summe das Zeichen zusetzen, welches die Grösse hat, von welcher die Subtraction geschiehet. W. Z. E. W.

Die 3. Aufgabe.

32. **Grössen mit einerley und verschiedenen Zeichen durch einander zu multipliciren.**

Auflösung.

Verrichtet die Multiplication, wie in Zahlen (§. 55 *Arithm.*), nur mercket: daß *einerley Zeichen in dem Producte +, verschiedene aber — geben.*

Exempel.

$$\begin{array}{rr} a + b - d & 10 = 8 + 4 - 2 \\ a - b - d & 2 = 8 - 4 - 2 \\ \hline - ad - bd + dd & - 16 - 8 + 4 \\ - ab - bb + bd & - 32 - 16 + 8 \\ aa + ab - ad & 64 + 32 - 16 \\ \hline aa - bb - 2ad + dd. & 20 = 68 - 48. \end{array}$$

Beweiß.

Wenn ihr + durch + multipliciret, so ist klar, daß das Product auch + haben muß. Ingleichen ist nicht schwehr zu begreifen, daß in dem Producte das Zeichen — seyn muß, wenn ihr + durch — multipliciret, weil ihr einen Mangel oder eine Schuld etliche mal nehmet. Allein, wenn — durch — multiplicirt

cirt wird, so scheint es nicht gleich klar zu seyn, warum in dem Producte + ist Mercket demnach, daß, wenn ihr 3 — 2 durch — 2 multipliciren sollet, ihr den Defect — 2 so viel mal nehmen sollet, als 3 — 2 Einheiten hat; das ist, 1 mal. Da ihr nun anfangs 3 mit — 2 multipliciret, so nehmet ihr den Defect 3 mal, und demnach 2 mal zu viel. Derowegen müsset ihr ihn noch zweymal dazu addiren. Und also giebt — 2 mit — 2 zum Producte + 4. W. Z. E. W.

Zusatz.

33. Wenn ihr — a mit + b multipliciret, so kommt — ab heraus. Derowegen, wenn ihr — ab durch + b dividiret, so muß — a heraus kommen. Dividiret ihr aber — ab durch — a, so muß + b heraus kommen. Demnach ist klar, daß auch in der Division die Regel gilt: **Einerley Zeichen geben in dem Quotienten +, verschiedene aber —.**

Die 4. Aufgabe.

34. **Grössen mit einerley und verschiedenen Zeichen durch einander zu dividiren.**

Auflösung.

Wenn eine gegebene Grösse durch die andere sich würcklich dividiren läßt; so verfahret, wie in Zahlen (§ *59 Arithm.*), nur daß ihr die Regel von den Veränderungen der Zeichen wohl in acht nehmet (§. 33).

Kan aber die Division nicht würcklich gegeschehen, so bleibt es bey dem, was oben (§. 24 & seqq.) ist gesagt worden.

Exempel.

$$
\begin{array}{llllll}
 & aa - bb - & ad + dd & (a + b - d \\
a - b - d & aa - ab - & ad & \\
\hline
 & + ab - bb - & ad + dd & \\
a - b - d) & + ab - bb - & bd & \\
\hline
 & + bd - ad + & dd & \\
a - b - d) & - ad + bd + & dd & \\
\hline
 & & 0 &
\end{array}
$$

Anmerckung.

35. Weil die Buchstaben nicht wie die Zahlen eine Bedeutung von der Stelle haben, in welcher sie stehen; so dürfet ihr euch hier an keine Ordnung binden, sondern möget den Quotienten suchen, in welchem Gliede ihr ihn findet: welches auch in dem Subtrahiren des Products aus dem Divisore in den Quotienten statt findet.

Die 4. Erklärung.

36. **Wenn man eine Grösse durch sich selbst multiplicirt, so heißt das Product, welches heraus kommt, die andere Potentz oder Dignität derselben Grösse. Multipliciret ihr die andere Dignität noch einmal durch die erste, so kommt die dritte Potentz oder Dignität heraus. Multipliciret ihr ferner die dritte durch die erste, so kommt die vierte Potentz oder**

oder Dignität heraus. Multipliciret ihr die vierte durch die erste, so kommt die fünfte Potentz oder Dignität heraus u. s. w. Die erste Stamm-Grösse, welche die erste Dignität genennet wird, heißt auch die Wurtzel, in Ansehung der andern, dritten, vierten, fünften 2c. Dignität.

Der 7. willkührliche Satz.

37. Den Grad der Potentz oder Dignität einer Grösse deutet durch eine kleine Ziffer, oder, wenn er nicht determinirt ist, durch einen kleinen Buchstaben an, welchen ihr oben zur Rechten an diejenigen Buchstaben setzet, wodurch die Grösse benennet wird. Z. E. Die andere, dritte, vierte 2c. Dignität von x ist x^2, x^3, x^4, 2c. x^m. Die Zahlen aber werden die Exponenten der Dignitäten genennet.

Der 1. Zusatz.

38. Dannenhero, wenn ihr eine Dignität durch eine andere von eben der Wurtzel multipliciren sollet, so dürfet ihr nur ihre Exponenten zusammen addiren.

Exempel.

x^3	y^m	x^m	x^n
x^4	y^n	x^r	x^n
x^7	y^{m+n}	x^{m+r}	x^{2n}

Der

Der 2. Zusatz.

39. Hingegen, wenn ihr die Dignität einer Grösse durch eine andere Dignität derselben dividiren sollet; so dürfet ihr nur ihre Exponenten von einander subtrahiren.

Exempel.

$$\frac{x^7}{x^4} = x^3 \qquad \frac{x^7}{x^3} = x^4 \qquad \frac{y^{m+n}}{y^n} = y^m \qquad \frac{y^n}{y} = y^{n-1}.$$

Der 3. Zusatz.

40. Endlich, wenn ihr die Dignität einer Grösse zu einer andern Dignität erheben sollet, so dürfet ihr nur ihren Exponenten durch den Exponenten der andern multipliciren. Z. E. Ihr sollet x^3 zu der vierten Dignität erheben; so multipliciret 3 durch 4, und nehmet x^{12} vor die gesuchte Dignität an. Oder überhaupt ist die Dignität n von $y^m = y^{mn}$.

Anmerckung.

41. Die Ursach ist leicht zu errahten. Denn, ihr sollt den Exponenten 3 viermal zu sich selbst addiren (§. 38). Dieses aber geschiehet, wenn ihr ihn durch 4 multipliciret (§. 23 *Arithm.*).

Der 4. Zusatz.

42. Folglich, wenn ihr aus einer gegebenen Dignität eine verlangte Wurtzel ziehen sollet, das ist, diejenige Grösse finden, welche zu einer gewissen Dignität ist erhoben worden, (§. 90, 91 *Arithm.* & §. 36 *Algebr.*; so dürfet ihr nur ihren Exponenten durch den Exponenten

der

der Wurtzel dividiren. Z. E. Die Wurtzel der vierten Dignität aus x^{12} ist x^3, die Wurtzel m aus x^n ist $x^{n:m}$.

Anmerckung.

43. Mercket wohl diese Art, die Wurtzeln zu zeichnen, denn ihr werdet inskünftige großen Vortheil davon haben.

Der 8. willkührliche Satz.

44. **Wenn ihr die Wurtzel aus einer Grösse ziehen sollet, dergleichen sie nicht hat, so setzet folgendes Wurtzel-Zeichen vor sie, und darüber den gehörigen Exponenten der Wurtzel: in der Quadrat Wurtzel aber könnet ihr den Exponenten weglassen.** Also schreibet ihr die cubic-Wurtzel von x, $\sqrt[3]{x}$; hingegen die Wurtzel der fünften Dignität von x schreibet ihr $\sqrt[5]{x}$.

Zusatz.

45. Weil $\sqrt{x}=x^{1:2}$, $\sqrt[3]{x^2}=x^{2:3}$, $\sqrt[m]{x^n}=x^{m:n}$ (§. 42); so könnet ihr jederzeit eine Formul in die Stelle der andern setzen, nachdem ihr von dieser oder von jener einen Vortheil haben könnet.

Die 5. Erklärung.

46. **Die Wurtzel dergleichen Grössen, woraus die verlangte Wurtzel nicht genau gezogen werden kan, werden irrational-Grössen, oder, wenn es Zahlen sind,** irra-

irrational-Zahlen genennet. Dergleichen sind $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[5]{6}$.

Anmerckung.

47. Die irrational-Grössen können entweder eine Benennung haben, als $\sqrt[3]{2}$ und $\sqrt[3]{5}$, oder verschiedene, als $\sqrt[4]{3}$ und $\sqrt[5]{6}$.

Die 5. Aufgabe.

48. **Irrational-Grössen von verschiedener Benennung zu einer Benennung zubringen.**

Auflösung.

Es seyn die gegebenen irrational-Grössen $x^{n:m}$ und $y^{r:s}$.

Weil der Unterscheid der Benennung in dem Unterscheide der Exponenten $n:m$ und $r:s$ bestehet, hingegen man diese Brüche in andere gleichgültige verwandeln kan, welche einerley Benennung haben (§. 81 *Arithm.*); so ist weiter nichts vonnöthen, als daß ihr die Exponenten unter einerley Benennung bringet, und die dadurch gefundenen Brüche in die Stelle der Exponenten schreibet. So werdet ihr finden, daß $x^{n:m} + y^{r:s} = x^{ns:ms} + y^{mr:ms} = \sqrt[ms]{x^{ns}} + \sqrt[ms]{y^{mr}}$.

Anmerckung.

49. Auf eben diese Art könnet ihr mit den irrational-Zahlen verfahren. Z. E. Ihr sollet $\sqrt[3]{5}$ und $\sqrt{3}$ unter

unter eine Benennung bringen. Weil $\sqrt[3]{5} = 5^{1:3}$ und $\sqrt{3} = 3^{1:2}$, so findet ihr $5^{1:3} + 3^{1:2} = 5^{2:6} + 3^{3:6} = \sqrt[6]{5^2} + \sqrt[6]{3^3} =$ (wenn ihr die Grössen unter dem Wurtzelzeichen würcklich zu ihren Dignitäten erhebt) $\sqrt[6]{25} + \sqrt[6]{27}$.

Die 6. Aufgabe.

50. *Irrational-Grössen auf eine kürtzere Art auszudrucken.*

Auflösung.

Weil $\sqrt[m]{a^n x^m} = a^{n:m} x^{m:m} = a^{n:m} x = x\sqrt[m]{a^n}$ (§ 42); so

1. Dividiret die Grösse unter dem Wurtzel-Zeichen durch eine Dignität von dem Grade, welcher einerley Exponenten mit der Wurtzel hat, als durch einen Cubum, wenn die irrational-Grösse eine cubic-Wurtzel ist. Denn, wenn dergleichen Division nicht angehet, so könnet ihr auch die irrational-Grösse nicht kürtzer ausdrucken.
2. Den Quotienten lasset unter dem Wurtzel-Zeichen.
3. Vor das Wurtzel-Zeichen aber setzet die Wurtzel der Dignität, wodurch ihr dividiret.

So ist geschehen, was man verlangte.

Exem-

Exempel.

$\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{8.3} = 2\sqrt[3]{3}$. Ingleichen
$\sqrt{18} = \sqrt{2.9} = 3\sqrt{2}$. Wiederum
$\sqrt[4]{48} = \sqrt[4]{16.3} = 2\sqrt[4]{3}$.

Der 1. Zusatz.

51. Wenn ihr die irrational-Grössen von einerley Art solchergestalt reduciret, und es bleibt unter dem Wurtzel-Zeichen einerley Grösse stehen; so verhalten sie sich gegen einander, wie die rational-Grössen vor dem Wurtzel-Zeichen. Z. E. $\sqrt{8} = \sqrt{4.2} = 2\sqrt{2}$ und $\sqrt{18} = \sqrt{9.2} = 3\sqrt{2}$. Derowegen ist $2\sqrt{2} : 3\sqrt{2} = 2 : 3$ (§. 75 *Arithm.*).

Der 2. Zusatz.

52. Derowegen könnet ihr durch gegenwärtige Aufgabe finden, ob zwo irrational-Grössen eine Verhältniß gegen einander haben, welche sich durch rational-Grössen ausdrucken lässet, z. E. daß $\sqrt{8} : \sqrt{18} = 2 : 3$ (§. 51).

Der 3. Zusatz.

53. Weil ihr in solchergestalt reducirten irrational-Grössen den Theil, welcher irrational bleibt, für den Namen der Einheit mit Recht haltet (§. 5 & seqq *Arithm.*); so könnet ihr die Summe oder den Unterscheid der irrational-Grössen finden, welche unter dem

dem Wurtzel-Zeichen einerley Grössen haben, und von einerley Art sind, wenn ihr die rational-Grössen vor dem Wurtzel-Zeichen zusammen addiret oder von einander subtrahiret. So werdet ihr finden, daß $\sqrt{8} + \sqrt{18} = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$ und $\sqrt{18} - \sqrt{8} = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$. Ingleichen $\sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{3.8} + \sqrt[3]{3.27} = 2\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{3} = 5\sqrt[3]{3}$.

Der 4. Zusatz.

54. Wenn ihr die Grössen, welche zum Theil rational, zum Theil irrational sind, gantz irrational machen sollet; so müsset ihr die Grösse vor dem Wurtzel Zeichen zu der Dignität erheben, welche der Exponent über dem Wurtzel-Zeichen andeutet, und durch selbige die Grösse unter dem Wurtzel-Zeichen multipliciren. So werdet ihr finden, daß $5\sqrt{2} = \sqrt{2.25} = \sqrt{50}$ und $5\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3.5^3} = \sqrt[3]{3.125} = \sqrt[3]{375}$.

Die 1. Anmerckung.

55. Damit ihr erfahret, ob eine vorgegebene Zahl sich durch eine Dignität von einem gegebenen Grade dividiren lässet, oder nicht, so dürfet ihr sie nur in diejenigen Zahlen zergliedern, durch deren Multiplication sie entstehet. Dieses aber geschiehet, wenn ihr sie mit den eintzelnen Zahlen zu dividiren anfanget. Z. E. Ihr sollt auf solche Weise 368 zergliedern, so findet ihr:

2	184
4	92
8	46
16	28

Die 2. Anmerckung.

56. Wem die irrational-Rechnungen anfangs verdrüßlich fallen, der kan sie so lange überschlagen, bis sie unten vorkommen. Er hüte sich aber mit Fleiß, daß er nicht für unnütze Grillen halte, wovon er den Nutzen nicht bald sehen kan. Ihr werdet in dem folgenden erfahren, daß ich niemals eine Lehre vortrage, welche nicht ihren gewissen Nutzen hat.

Die 7. Aufgabe.

57. **Eine irrational-Grösse durch eine andere von einerley Art zumultipliciren.**

Auflösung

Weil $\sqrt[m]{a^n} = a^{n:m}$ und $\sqrt[m]{b^r} = b^{r:m}$ (§. 42); so ist $\sqrt[m]{a^n} \cdot \sqrt[m]{b^r} = a^{n:m}\, b^{r:m}$ (§. 20) $= \sqrt[m]{a^n\, b^r}$ (§. 45.) und erhellet hieraus folgende Regel:

1. Multipliciret die Grössen unter dem Wurtzel-Zeichen (a^n und b^r) durch einander.
2. Vor das Product setzet das Wurtzel-Zeichen mit seinem Exponenten ($\sqrt[m]{}$).

So

So werdet ihr finden, daß $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$, und $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{35}$.

Zusatz.

58. Wenn ihr also eine irrational-Zahl durch eine andere irrational-Zahl dividiren sollet, so dürfet ihr nur die Zahlen unter dem Wurtzel-Zeichen durch einander dividiren. So werdet ihr finden, daß $\sqrt[3]{35} : \sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{5}$, $\sqrt[3]{35} : \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{7}$ und $\sqrt{6} : \sqrt{3} = \sqrt{2}$.

Die 8. Aufgabe.

59. *Eine Aufgabe algebraisch aufzulösen.*

Auflösung.

1. Unterscheidet mit Fleiß die bekannten Grössen von den unbekanten, und benennet jene mit den ersten, diese mit den letzten Buchstaben des Alphabets (§. 5). Wenn die Benennung geschehen ist, so
2. Suchet eine Gleichung, daß ihr nemlich eine Sache mit zweyerley Nahmen beleget: denn so müssen die beyden Werthe einander gleich seyn (*§. 27 Arithm.*). Ihr müsset aber so viel Gleichungen finden, als ihr unbekannte Grössen habt. Wenn es nicht angehet, so ist es ein Zei-

chen, daß ihr die eine unbekannte Grösse so groß annehmen könnet, als ihr wollet. Und pflegt man dergleichen Aufgaben **undeterminirte Aufgaben** zunennen. Es sind aber die Gleichungen entweder in der Aufgabe selbst angedeutet, oder ihr müsset sie aus ihren Umständen durch Hülfe derjenigen Lehrsätze suchen, welche von der Gleichheit handeln.

3. Wenn in den Gleichungen bekannte und unbekannte Grössen mit einander vermenget sind, so müsset ihr sie dergestalt einrichten, daß auf einer Seite lauter bekannte, auf der andern aber nur eine unbekannte stehen bleibt: Welches geschiehet, wenn ihr die Grössen, welche subtrahiret sind, durch addiren; welche addiret sind, durch subtrahiren; welche andere multipliciren, durch dividiren; welche andere dividiren, durch multipliciren wegbringet: oder auch die Wurtzeln zu ihren Dignitäten erhebet, oder aus den Dignitäten die gehörigen Wurtzeln ausziehet: damit ihr immer eine Gleichheit erhaltet (§. 30, 31, 32, 33 *Arithm.* & §. 36 *Algebr.*).

Anmerckung.

60. Unerachtet die Einrichtung der gefundenen Gleichung sehr oft auf beschriebene Weise geschehen kan; so gehet es doch nicht in allen Fällen an. Wir wollen aber erst diese Regeln uns durch Exempel bekant machen, ehe wir zu andern schreiten. Denn die Algebra lernet man nicht so wohl durch Regeln, als durch Exempel.

Die

Die 9. Aufgabe.

61. **Aus der gegebenen Summe zweyer Grössen und ihrem Unterscheide die Grössen selber zufinden.**

Auflösung.

Es sey die Summe $=a$, die kleine Grösse $=x$, der Unterscheid $=b$, die große $=y$.

So ist

$x+y=a$ (§. 15 *Arithm.*), $y-x=b$ (§. 18 *Arithm.*)
$x \quad x$ *subtr.* $\quad x \quad x$ *add.*

$y=a-x \qquad y=b+x$

demnach

$a-x=b+x$ (§. 28 *Arithm.*)
$x \quad x$ *add.*

$a=b+2x$
$b \quad b$ *subtr.*

$a-b=2x$
2 *div.*

$$\frac{a-b}{2}=x.$$

Folglich ist die grössere $y=\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b+b=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b$.

Regel.

Ziehet den Unterscheid der beyden Grös-

sen (b) von der Summe (a) ab. Den Rest dividiret durch zwey; so ist der Quotient die kleine Grösse (x). Addiret den Unterscheid zu der Summe; so ist die Helfte davon die große Grösse (y).

Z. E. Es sey $a=30$, $b=8$, so ist $(a-b):2=(30-8):2=22:2=11$, und $(a+b):2=(30+8):2=38:2=19$.

Probe.

Den $19-11=8$, und $19+11=30$. Oder allgemein:

$$\begin{array}{c}\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b\\ \frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b\\ \hline \text{Summe } a,\end{array}\qquad\begin{array}{c}\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b\\ \frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b\\ \hline \text{Untersch. } b.\end{array}$$

Anmerckung.

62. Ihr könnet jederzeit aus der letzten Gleichung eine Regel machen, durch welche die Aufgabe in allen vorkommenden Fällen aufgelöset werden kan, wenn ihr vor die Buchstaben die Nahmen der Sachen setzet, welche sie bedeuten, und an statt der Zeichen die Rechnungs-Arten benennet, welche sie andeuten: allein der Kürtze halber werde ich ins künftige keine Regel hersetzen, wenn es nicht besondere Umstände erfordern. Und dieses thue ich um so viel lieber, weil man die Exempel in Zahlen viel hurtiger auflösen kan, wenn man die Ziffern in die Stelle der Buchstaben setzet, als wenn man nach der Regel verfährt. Auch ist zumercken, daß öfters in den Gleichungen, in welchen noch bekantes und unbekantes mit einander vermenget ist, nützliche Lehrsätze enthalten sind. Z. E. Aus der Gleichung $a-b=2x$ erhellet folgender Lehrsatz:

Wenn man von der Summe zwoer Grös-

Grössen ihren Unterscheid abziehet; so ist der Rest zweymal so groß als die kleinere.

Die 10. Aufgabe.

63. **Eine Zahl zufinden, deren Helfte, $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{4}$ zusammen, um 1 grösser sind als die Zahl selbst.**

Auflösung.

Es sey die gesuchte Zahl $= x$, so ist,

$$x + 1 = \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{3}x + \tfrac{1}{4}x$$

$$= \frac{12x + 8x + 6x}{24}$$

$$= \tfrac{26}{24}\,x \quad (\text{§. 82 } Arithm.)$$

$$= x + \tfrac{1}{12}x \quad (\text{§§. 78, 80 } Arithm.).$$

$$1 = \tfrac{1}{12}x$$

12 *mult.*

$$12 = x.$$

Probe $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x = 6 + 4 + 3 = 13.$

Es ist demnach nichts mehr als die einige Zahl 12, welche diese Eigenschaft hat.

Die 11. Aufgabe.

64. **Aus der gegebenen Summe zwoer Zahlen und dem Producte einer Zahl in die andere, die Zahlen selber zufinden.**

Auflösung

Es sey die Summe $= a$, die halbe Differenz $= x$;
das Product $= b$,

so ist die große Zahl $\frac{1}{2}a + x$ } §. 61.
die kleine $\frac{1}{2}a - x$ }

Und also $\frac{1}{4}aa - xx = b$ (§. 32.)

$$\begin{array}{l} \frac{1}{4}aa - xx = b \\ \quad xx \quad xx \quad add. \\ \hline \frac{1}{4}aa = b + xx \\ \quad b \quad b \quad subtr. \\ \hline \frac{1}{4}aa - b = xx \\ \hline \quad rad.\ extr. \\ \sqrt{(\frac{1}{4}aa - b)} = x. \end{array}$$

Also ist die große Zahl $\frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}aa - b)}$; die kleine $\frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{4}aa - b)}$.

Es sey $a = 14$, $b = 48$, so ist $\sqrt{(\frac{1}{4}aa - b)} = \sqrt{(49 - 48)} = 1$, folglich die große Zahl $\frac{1}{2}a + x = 7 + 1 = 8$, und die kleine $\frac{1}{2}a - x = 7 - 1 = 6$

Probe. Denn $8 + 6 = 14$ und $6.8 = 48$.

Anmerckung.

65. Es ist an der Benennung öfters viel gelegen. Denn, wenn ihr in gegenwärtiger Aufgabe die große Zahl x, die kleine y nennet: so kommet ihr auf eine Gleichung, welche ihr noch nicht aufzulösen vermögend seyd. Mercket dabey den Lehrsatz, welchen die Gleichung $\frac{1}{4}aa = b + xx$ an die Hand giebt:

Das Quadrat der halben Summe zwoer Grössen ist gleich dem Producte derselben in einander und dem Quadrate des halben Unterscheides.

Die 12. Aufgabe.

66. **Es wird gegeben die Summe gleicher Dignitäten zwoer Grössen, und der Unter-**

Unterscheid selbiger Dignitäten, ihr sollt die Grössen selbst finden.

Auflösung.

Es sey die Summe $=a$, die kleine Grösse $=x$,
der Unterscheid $=b$, die große $=y$;

so ist

$$x^m + y^m = a \qquad y^m - x^m = b$$

$$y^m = a - x^m \qquad y^m = b + x^m$$

folglich

$$a - x^m = b + x^m$$

$$a = b + 2x^m$$

$$a - b = 2x^m$$

$$(a-b):2 = x^m$$

$$\sqrt[m]{(\tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}b)} = x.$$

Es sey $m=2$, $a=97$, $b=65$; so ist $x = \sqrt{(\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b)} = \sqrt{(48\frac{1}{2} - 32\frac{1}{2})} = \sqrt{6} = 4$, und $y = \sqrt{(b + x^2)} = \sqrt{(65+16)} = \sqrt{81} = 9$.

Probe: Denn $81 + 16 = 97$ und $81 - 16 = 65$.

Die 13. Aufgabe.

67. Zwo Zahlen von der Beschaffenheit zufinden, daß das Product einer jeden in die Quadrat-Wurzel der andern einer gegebenen Zahl gleich ist.

Auflösung.

Es sey das eine Product $=a$ die eine Zahl $=x$
das andere $=b$, die andere $=y$;

So ist $x\sqrt{y}=a$ $\qquad y\sqrt{x}=b$

$$x^2 y=a^2 \qquad y^2 x=b^2$$

$$x=b^2 : y^2$$

$$x^2=b^4 : y^4.$$

Wenn ihr den Werth von x^2 in die erste Gleichung zur Lincken $x^5 y$ setzet, so bekommet ihr

$$b^4 y : y^4 = b^4 : y^3 = a^2 \qquad y^3 \; mult.$$

$$b^4 = a^2 y^3$$

$$b^4 : a^2 = y^3$$

$$\sqrt[3]{(b^4 : a^2)} = y.$$

Es sey $a=18$, $b=12$, so ist $y=\sqrt[3]{(b^4:a^2)} =\sqrt[3]{(20736:324)}=\sqrt[3]{64}=4$ und $x=b^2 : y^2=144:16=9$.

Probe: Denn $9.2=18$, und $4.3=12$.

Die 14. Aufgabe.

68. **Aus der gegebenen Summe zwoer Grössen und der Differentz ihrer Quadrate, die beyden Grössen zufinden.**

Auf-

Auflösung.

Es sey die Summe $=a$, die halbe Differentz der Grössen $=y$,
die Differentz der Quadr. $=b$;

So ist die eine Grösse $\frac{1}{2}a+y$ (§. 61).
Die andere $\frac{1}{2}a-y$
Das Quadrat der erstern $\frac{1}{4}aa+ay+yy$,
Das Quadr. der andern $\frac{1}{4}aa-ay+yy$,

Die Differentz $b = 2ay$

$$\frac{\quad\quad}{2a}$$

folglich $b:2a=y$.

Es sey $b=40$, $a=10$; so ist $y=40:20=2$; folglich die eine Zahl $\frac{1}{2}a+y=5+2=7$, die andere $\frac{1}{2}a-y=5-2=3$.

Probe: Denn $7+3=10$, und $49-9=40$.

Die 15. Aufgabe.

69. **Aus der gegebenen Summe zwoer Grössen und der Summe ihrer Quadrate, die beyden Grössen zufinden.**

Auflösung.

Es sey die erste Summe $=a$, die eine Grösse $\frac{1}{2}a+y$ (§.61).
Die andere $=b$, die andere $\frac{1}{2}a-y$
So ist das Quadrat der erstern $\frac{1}{4}aa+ay+yy$
der andern $\frac{1}{4}aa-ay+yy$

Die Summe $b=\frac{1}{2}aa+2yy$.

Folg-

Folglich
$$b - \tfrac{1}{2}aa = 2yy$$
$$\tfrac{1}{2}b - \tfrac{1}{4}aa = yy$$
$$\sqrt{(\tfrac{1}{2}b - \tfrac{1}{4}aa)} = y.$$

Es sey $a=10$, $b=58$, so ist $\sqrt{(\frac{1}{2}b-\frac{1}{4}aa)} = \sqrt{(29-25)} = \sqrt{4}=2$: folglich $\frac{1}{2}a+y=5+2=7$, und $\frac{1}{2}a-y=5-2=3$.

Probe: Denn $7+3=10$, und $49+9=58$.

Die 16. Aufgabe.

70. **Zwo Zahlen zufinden, deren Product einer gegebenen Zahl gleich ist, das Quadrat aber der Summe zu dem Quadrate der Differenz beyder Zahlen eine gegebene Verhältniß hat.**

Auflösung.

Es sey das Product $=a$, die Summe $=2x$, die gegebene Verhältniß $=b:c$, der Unterscheid $=2y$,

so ist die eine Zahl $x+y$,

die andere $x-y$,

und also

$$xx-yy=a \quad b:c=4x^2:y4^2=x^3:y^2 \text{ (§. 75 Arithm.)}$$
$$xx= a+y^2 \quad by^2 = cx^2 \text{ (§. 109 Arithm.)}$$
$$by^2 : c = x^2.$$

Folg-

Folglich

$$a + y^2 = by^2 : c$$

$$ac + cy^2 = by^2$$

$$ac = by^2 - cy^2$$

$b-c$ *div.*

$$ac : (b-c) = y^2$$

$$\sqrt{ac} : \sqrt{(b-c)} = y.$$

Es sey $a=96$, $b:c=25:1$, so ist $y=\sqrt{96}:\sqrt{(25-1)}=\sqrt{4}$ (§. 58) $=2$; und $x=\sqrt{(a+y^2)}=\sqrt{(96+4)}=\sqrt{100}=10$: folglich $x+y=10+2=12$, und $x-y=10-2=8$.

Probe: $12\,8=96$, und $25:1=400:16$.

Die 17. Aufgabe.

71. **Aus der gegebenen Tage-Reise zweener Bothen und der Zeit, in welcher der andere dem erstern nachgehet, die Zeit zufinden, in welcher er ihn einholet.**

Auflösung.

Es sey die Tage-Reise des erstern $=a$, die gesuchte Zeit $=x$,
des andern $=b$,
die gegebene Zeit $=c$.

So ist die Reise des erstern in der gegebenen Zeit $=ac$, in der gesuchten $=ax$. Die Reise des andern in der letztern Zeit $=bx$. Da nun beyde einen gleichen Weg zurücke gelegt haben; so ist

$$ac + ax = bx$$
$$\quad ax \quad ax \quad subtr.$$
$$ac = bx - ax = (b - a)\,x$$
$$\quad b - a \; div.$$
$$ac : (b - a) = x.$$

Es sey $a = 6$, $b = 8$, $c = 4$; so ist $x = 24 : (8 - 6) = \frac{24}{2} = 12$.

Probe: Denn $12 . 8 = 96$, und $4 . 6 + 12 . 6 = 24 + 72 = 96$.

Anmerckung.

72. Weil man in Auflösung dieser Aufgabe weder auf den Begriff der Tage Reise, noch der Bothen siehet; so ist daraus abzunehmen, daß sie bey der Bewegung aller Cörper kan angebracht werden.

Die 18. Aufgabe.

73. **Aus der gegebenen Tage-Reise eines Bothens und der Zeit, da er hinweg ist, die Tage-Reise eines andern Bothens zubestimmen, welcher ihn in einer gegebenen Zeit einholen soll.**

Auflösung.

Es sey die Tage-Reise des erstern $= a$,
des andern $= x$,
die verflossene Zeit $= b$,
die gegebene Zeit $= c$;

so findet man wie in der vorhergehenden Aufgabe

$$ab + ac = cx$$
$$\frac{ab}{c} + a = x.$$

Es

Es sey $a=6$, $b=4$, $c=12$; so ist $x=\frac{24}{12}+6=2+6=8$.

Probe: Denn $24+72=96$ u. $8.12=96$

Die 19. Aufgabe.

74. **Aus der gegebenen Weite zweener Oerter von einander, aus welchen zu gleicher Zeit zween Bothen ausreisen, und der Tage-Reise eines jeden, die Zeit zubestimmen, in welcher sie einander begegnen.**

Auflösung.

Es sey die Weite $=a$, die gesuchte Zeit $=x$,
die Tage-Reise des erstern $=b$,
des andern $=c$.

So ist der Weg des erstern in der zubestimmenden Zeit $=bx$, des andern $=cx$; folglich, weil beyde zusammen die ganze Weite der Oerter von einander durchreiset,

$$bx+cx=a$$

das ist $(b+c)x=a$

$$x=a:(b+c).$$

Es sey $a=120$, $b=6$, $c=4$; so ist $x=120:(6+4)=120:10=12$. Sie begegnen also einander in dem zwölften Tage.

Probe: Denn $6.12+4.12=72+48=120$.

Die 20. Aufgabe.

75. **Aus dem gegebenen Werthe einer Kanne guten Weins, zubestimmen, wie viel man Wasser darunter mischen muß, damit man das Maaß um einen verlangten geringern Preis geben kan.**

Auf-

Auflösung.

Der höhere Preis sey $=a$, das Wasser $=x$,
der geringere $=b$,
das Kannen-Maaß $=1$.

Da nun der Preis von $1=b$, so ist der Preis von $1+x=b+bx$ (§. 113 *Arithm.*): und daher, weil das Wasser x nichts gilt,

$b+bx=a$ (§. 28 *Arithm.*)

$bx=a-b$

$x=(a-b):b$

Es sey $a=16$, $b=10$; so ist $x=(16-10):10=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$.

Probe: Denn wenn $1\frac{3}{5}$ Kannen 16 Groschen kommen; so kommt eine Kanne 10 Groschen (§. 113 *Arithm.*).

Die 21. Aufgabe.

76. **Aus dem gegebenen Preise zweener Weine von verschiedener Güte, zubestimmen, wie viel man von dem geringern zu dem bessern giessen muß, damit man ihn vor einen verlangten Preis geben kan.**

Auflösung.

Es sey der Preis des guten $=a$,
des schlechtern $=b$;
des vermischten $=c$,
das Kannenmaaß $=1$,

die Grösse des schlechtern $=x$,
so ist sein Preiß $=bx$,
die Grösse des guten $=1-x$,
sein Preiß $=a-ax$.

Folg-

Folglich:

$$a - ax + bx = c \quad (\text{§. 28 Arithm.}).$$
$$\underline{\quad ax \qquad ax \quad}$$
$$a + bx = ax + c$$
$$\underline{\quad bx \qquad bx \quad}$$
$$a = ax - bx + c$$
$$\underline{\quad c \qquad\qquad c \quad}$$
$$a - c = ax - bx = (a-b)x$$
$$\underline{\qquad\qquad\qquad} \; a-b \text{ div.}$$
$$(a-c):(a-b) = x.$$

Es sey $a = 16$, $b = 10$, $c = 12$; so ist $x = (16 - 12):(16 - 10) = 4:6 = \frac{2}{3}$. Demnach werden von dem schlechten $\frac{2}{3}$ und von dem guten $\frac{1}{3}$ genommen.

Probe: Denn $\frac{1}{3}$ von dem guten kommt $5\frac{1}{3}$ Gr. und $\frac{2}{3}$ von dem schlechten $6\frac{2}{3}$ Gr. folglich der vermischte 12 Gr.

Anmerckung.

77. Die auf besondere Arten der Fälle gerichtete Aufgaben sind schwehrer aufzulösen, als die allgemeinern von Zahlen und Grössen. Denn, man hat hier viele besondere Umstände, welche zur Auflösung der Aufgabe nichts beytragen, und es ist öfters, sonderlich vor Anfänger, nicht eine geringe Mühe, wenn man die Aufgaben von den besondern und zur Auflösung nicht dienenden Umständen befreyen soll.

Die 6. Erklärung.

78. **Wenn die Wurtzel einer Dignität oder Potentz aus zween Theilen bestehet,**

so nennet man sie eine binomische Wurtzel, als $a + b$. Bestehet sie aus drey Theilen, als $a + b + c$; so heißt sie eine trinomische Wurtzel: wenn sie aus vier Theilen bestehet, eine quadrinomische Wurtzel u. s. w. überhaupt aber nennet man sie eine polynomische Wurtzel, wenn sie aus mehr als zween Theilen bestehet.

Die 22. Aufgabe.

79. **Die Natur des Quadrats oder der andern Dignität einer binomischen Wurtzel zufinden.**

Auflösung.

Ihr verlanget zu wissen, wie das Quadrat einer binomischen Wurtzel entstehen kan (§. 4 *Method. Mathem.*). Multipliciret demnach die binomische Wurtzel $a + b$ durch sich selbst, so wird das Product zeigen, aus was vor Theilen das Quadrat zusammen gesetzt wird, und wie diese Theile des Quadrats aus den Theilen der Wurtzel entstehen.

$$\begin{array}{r} a + b \\ a + b \\ \hline + ab + b^2 \\ a^2 + ab \quad\quad \\ \hline a^2 + 2ab + b^2 \end{array}$$

$a^2 + 2ab + b^2$ Quadrat der binomischen Wurtzel.

Lehr=

Lehrsatz.

Das Quadrat der binomischen Wurtzel begreift in sich die Quadrate der beyden Theile (a^2 und b^2) und ein Product ($2ab$) aus dem einen Theile zweymal genommen ($2a$) in den andern (b).

Anmerckung.

80. Ihr habt hier auf eine sehr leichte Art den andern Lehrsatz der Rechen-Kunst (§. 93 *Arithm.*) gefunden, aus welchem wir die Ausziehung der Quadrat-Wurtzel (§. 97 *Arithm.*) hergeleitet haben. Wenn ihr aber dieselben Regeln vergessen hättet; so könte euch dieses allgemeine Exempel $a^2 + 2ab + b^2$ an statt derselben dienen. Denn, ihr sehet, daß, wenn ihr in der ersten Classe zur Lincken das darinnen befindliche Quadrat a^2 abziehet, ihr den ersten Theil der Wurtzel a habt. Wollt ihr nun den andern finden, so müsset ihr mit $2a$, das ist, mit dem gefundenen Quotienten, zweymal genommen, die folgende Zahl $2ab$ dividiren, und hernach nicht allein das Product aus dem Divisore $2a$ in den neuen Quotienten b, sondern auch das Quadrat des neuen Quotienten b^2 subtrahiren.

Zusatz.

81. Setzet $a = a + b$, und $b = c$, so kommt für das Quadrat der trinomischen Wurtzel $(a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2$. Und also müsset ihr zu dem binomischen Quadrate noch das Product aus der Summe der beyden Theile der binomischen Wurtzel, zweymal genommen, in den dritten Theil und das Quadrat des dritten Theils addiren. Setzet $a = a + b + c$, und $b = d$, so kommt für das Quadrat der quadrinomischen Wurtzel $(a+b+c)^2 + 2$

 $(a+$

$(a+b+c)d+d^2$. Derowegen müsset ihr zu dem Quadrate der trinomischen Wurtzel noch das Product aus der Summe der ersten drey Theile, zweymal genommen, in den vierten Theil, und das Quadrat des vierten Theils addiren. Solchergestalt sehet ihr, daß ihr nach der binomischen Formul auch das Quadrat einer jeden polynomischen Wurtzel finden, ingleichen aus einer gegebenen Zahl eine jede polynomische Wurtzel ziehen könnet. Denn, $(a+b+c+d+e \&c)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a+b)c + c^2 + 2(a+b+c)d + d^2 + 2(a+b+c+d)e + e^2$ u. s. w. unendlich fort.

Die 7. Erklärung.

82. **Eine** unreine quadratische Gleichung (Æquatio quadratica affecta) **wird genennet, in welcher** $x^2 \mp ax = \pm b^2$.

Die 23. Aufgabe.

83 ***Eine unreine quadratische Gleichung aufzulösen.***

Auflösung.

Weil $x^2 . ax = . b^2$, so nehmet x für den einen Theil einer binomischen Wurtzel an. Alsdenn wird a die bekannte Grösse des andern Gliedes, der andere Theil der Wurtzel zweymal genommen, und also $\frac{1}{2}a$ der andere Theil der Wurtzel seyn: folglich fehlet zu einem vollkommenen Quadrate das Quadrat von $\frac{1}{2}a$, nemlich $\frac{1}{4}aa$ (§. 79). Wenn ihr nun solches

solches beyderseits addiret; so läßt sich die Quadrat-Wurzel ausziehen, und die gegebene Gleichung völlig einrichten.

Es sey $x^2 + ax = b^2$

$$\frac{1}{4}a^2 \quad \frac{1}{4}a^2$$

$$x^2 + ax + \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2 + b^2$$

$$x + \frac{1}{2}a = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b^2)}$$

$$x = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b^2)} - \frac{1}{2}a.$$

Es sey ferner:

$$x^2 - ax = b^2$$

so ist $x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2 + b^2$

$$x - \frac{1}{2}a = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b^2)}$$

oder $\frac{1}{2}a - x$

folglich $x = \frac{1}{2}a \mp \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b^2)}$.

Denn, weil $\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b^2)}$ grösser als $\frac{1}{2}a$ ist; so gehet die andre Wurzel $x = \frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b^2)}$ nicht an.

Es sey endlich

$$x^2 - ax = -b$$

so ist $x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2 - b^2$

$$x - \frac{1}{2}a = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - b^2)}$$

oder $\frac{1}{2}a - x$

$$x = \frac{1}{2}a \mp \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - b^2)}.$$

Weil $\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - b^2)}$ kleiner als $\frac{1}{2}a$ ist; so läßt es sich von $\frac{1}{2}a$ subtrahiren, und also gehen beyde Wurtzeln an.

Nemlich dieses findet statt, wenn man zwey unbekante Grössen hat, und es gilt gleich viel, welche von beyden man x nennet, indem immer einerley Gleichungen heraus kommen.

Anmerckung.

84. Den Nutzen dieser Regel werdet ihr ins künftige überflüssig sehen. Jetzt begnügt mich, dieselbe durch die beyden folgenden Aufgaben zuerläutern.

Die 24. Aufgabe.

85. *Zwo Zahlen von der Beschaffenheit zufinden, daß ihr Product, ihre Summe und die Differentz ihrer Quadrate einander gleich sind.*

Auflösung.

Es sey die grössere Zahl $= x$,
die kleinere $= y$; so ist

$$x^2 - y^2 = xy, \quad xy = x + y$$

$$xy - y = x$$

$$y = x : (x - 1).$$

Wenn ihr den Werth y in der erstern Gleichung an seine Stelle setzet, so bekommet ihr, weil $y^2 = x^2 : (x-1)^2$, und $xy = x^2 : (x - 1,$,

x^2

$$x^2 - \frac{x^2}{x^2-2x+1} = \frac{x^2}{x-1}$$

$x^2 - 2x + 1$ *mult.*

$$x^4 - 2x^3 + x^2 - x^2 = x^3 - x^2$$

$$x^4 - 3x^3 = -x^2$$

x^2 *div.*

$$x^2 - 3x = -1$$

$\frac{9}{4}$ $\frac{9}{4}$ (§. 83).

$$x^2 - 3x + \tfrac{9}{4} = \tfrac{9}{4} - 1 = \tfrac{5}{4}$$

$x - \frac{3}{2} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{5}$
oder $\frac{3}{2} - x =$

$x = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$
oder $x = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$.

Ferner, weil $xy - x = y$, so ist $x = y : (y-1)$. Wenn ihr diesen Werth in der erstern Gleichung in die Stelle x setzet, so bekommet ihr

$$\frac{y^2}{y^2 - 2y + 1} - y^2 = \frac{y^2}{y-1}$$

und wenn ihr die Reduction, wie vorhin, anstellet, so findet ihr endlich $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$, oder $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$.

Weil $\frac{1}{2}\sqrt{5}$ grösser ist als $\frac{1}{2}$; so findet bloß die erstere Wurzel statt. Derowegen, weil diese allein mit $\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$, nicht aber mit $\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$; hingegen die falsche Wurzel $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$

mit $\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$ die Probe hält; so sind die verlangten Zahlen $\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ und $\frac{1}{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{5}$.

Probe: Denn $\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} = 2 + \sqrt{5}$, und $(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5})\ (\frac{1}{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{5}) = 2 + \sqrt{5}$, ingleichen $\frac{9}{4} + \frac{3}{2}\sqrt{5} + \frac{5}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{5}{4} = 2 + \sqrt{5}$. Gleichergestalt ist $\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} = 2 - \sqrt{5}$, und $(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5})\ (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}) = 2 - \sqrt{5}$, ingleichen $\frac{9}{4} - \frac{3}{2}\sqrt{5} + \frac{5}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{5}{4} = 2 - \sqrt{5}$.

Die 25. Aufgabe.

86. Aus dem gegebenen Producte zwoer Grössen und ihrer Differentz die Grössen selber zufinden.

Auflösung.

Es sey das Product $= a$, die gröste Grösse $= x$,
die Differentz $= b$, die andre $= y$;

So ist:

$$a = xy \qquad\qquad b = x - y$$

$$a : y = x, \qquad\qquad b + y = x.$$

Folglich $a : y = b + y$

$$y$$

$$a = by + y^2$$

$$\tfrac{1}{4}b^2 \qquad \tfrac{1}{4}b^2 \ (\S.\ 83).$$

$$a + \tfrac{1}{4}b^2 = \tfrac{1}{4}b^2 + by + y^2$$

$$\sqrt{(a + \tfrac{1}{4}b^2)} = \tfrac{1}{2}b + y$$

$$\sqrt{(a + \tfrac{1}{4}b^2)} - \tfrac{1}{2}b = y.$$

Es

Es sey $a=40$, $b=3$, so ist $y=\surd(40+\frac{9}{4})$ $-\frac{3}{2}=\surd(169:4)-\frac{3}{2}=\frac{13}{2}-\frac{3}{2}=\frac{10}{2}=5$, und demnach $x=8$.

Probe: Denn $5.8=40$, und $8-5=3$.

Die 26. Aufgabe.

87. **Die Natur der dritten Dignität einer Binomischen Wurtzel zufinden.**

Auflösung.

Ihr habt nur die andere Dignität,

$$a^2+2ab+b^2$$

durch die Wurtzel $a+b$ zu multipliciren (§. 32)

$$\begin{array}{r} +a^2b+2ab^2+b^3 \\ a^3+2a^2b+ab^2 \\ \hline \end{array}$$

so ist $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ die verlangte dritte Dignität (§. 78).

Lehrsatz.

Die dritte Dignität einer binomischen Wurtzel enthält in sich die dritte Dignität der beyden Theile (a^3 und b^3) und ein Product aus dem Quadrate des ersten Theiles drey mal genommen ($3a^2$) in den andern (b), nebst noch einem andern Producte aus dem ersten Theile drey mal genommen ($3a$) in das Quadrat des andern Theils (b^2).

Die 1. Anmerckung.

88. Ihr habt hier abermal auf eine sehr leichte Art den 3 Lehrsatz der Rechen-Kunst (*§. 99 Arithm.*) gefunden, woraus die Ausziehung der Cubic-Wurtzel hergeleitet worden ist (*§. 103 Arithm.*). Wenn ihr aber die dort gegebenen Regeln vergessen hättet, so könte euch das allgemeine Exempel $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ an

an deren statt dienen. Denn ihr sehet, daß, wenn ihr in der ersten Classe zur Lincken die daselbst befindliche dritte Dignität a^3 abziehet, ihr den ersten Theil der Wurtzel a habt. Wenn ihr nun aus den übrigen Gliedern den andern Theil finden wollet, so müsset ihr das erste zur Lincken $3a^2b$ durch das Quadrat des ersten drey mal genommen $(3a^2)$ dividiren, und hernach nicht allein das Product aus diesem Divisore $(3a^2)$ in den neuen Quotienten (b), sondern das Product aus dem Quadrate des neuen Quotienten (b^2) in den vorhergehenden dreymal genommen $(3a)$, und endlich die dritte Dignität des neuen Quotienten (b^3) abziehen.

Zusatz.

89. Setzet $a = a+b$, und $b = c$, so kommt für die dritte Dignität der trinomischen Wurtzel $a+b+c$ heraus $(a+b)^3 + 3(a+b)^2 c + 3(a+b)c^2 + c^3$, und also müsset ihr zu der Dignität der binomischen Wurtzel noch das Product aus dem Quadrate der binomischen Wurtzel dreymal genommen $3(a+b)^2$ in den dritten Theil c, das Product aus der binomischen Wurtzel dreymal genommen $3(a+b)$ in in das Quadrat des dritten Theils c^2, und die dritte Dignität desselben Theils c^3 addiren. Setzet $a = a+b+c$, und $b = d$, so ist die dritte Dignität der quadrinomischen Wurtzel $(a+b+c)^3 + 3(a+b+c)^2 d + 3(a+b+c)d^2 + d^3$; folglich müsset ihr noch zu der Dignität der trinomischen Wurtzel $(a+b+r)^3$ das Product aus dem Quadrate der trinomischen Wurtzel drey mal genommen $3(a+b+c)^2$ in den vierten Theil d, das Product aus der

der trinomischen Wurtzel dreymal genommen $3(a+b+c)$ in das Quadrat des vierten Theils d^2, und die dritte Dignität des vierten Theils d^3 addiren. Solchergestalt sehet ihr, daß ihr nach der binomischen Regel auch die dritte Dignität einer jeden polynomischen Wurtzel finden, ingleichen aus einer gegebenen Zahl eine jede polynomische Cubic-Wurtzel ziehen könnet. Denn $(a+b+c+d+e \text{ \&c.})^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+c^3+3(a+b+c)^2d+3(a+b+c)d^2+d^3+3(a+b+c+d)^2e+3(a+b+c+d)e^2+e^3$ u. s. w. unendlich fort.

Die 2. Anmerckung.

90. Auf eben solche Weise könnet ihr für die höhern Dignitäten Regeln finden. Und unerachtet ich in der folgenden Aufgabe zeigen werde, wie ihr an statt unendlicher Regeln für unendliche Dignitäten, zu welchen eine Grösse erhoben werden kan, eine einige finden könnet; so wird euch die Mühe doch nicht verdriessen, wenn ihr auf gleiche Art die Natur der vierten, fünften, sechsten Dignität u. s. w. untersuchet. Denn diese Untersuchung selbst wird euch dienen, die allgemeine Regel zuerfinden.

Die 27. Aufgabe.

91. **Eine allgemeine Regel zufinden, nach welcher jede binomische Wurtzel zu jeder verlangten Dignität erhoben werden kan.**

Auflösung.

Wenn ihr die binomische Wurtzel nach und nach zu ihren Dignitäten erhebet, wie beygefügte Tafel ausweiset.

$1a$	$1b$									
$1a^2$	$2ab$	$1b^2$								
$1a^3$	$3a^2b$	$3ab^2$	$1b^3$							
$1a^4$	$4a^3b$	$6a^2b^2$	$4ab^3$	$1b^4$						
$1a^5$	$5a^4b$	$10a^3b^2$	$10a^2b^3$	$5ab^4$	$1b^5$					
$1a^6$	$6a^5b$	$15a^4b^2$	$20a^3b^3$	$15a^2b^4$	$6ab^5$	$1b^6$				
$1a^7$	$7a^6b$	$21a^5b^2$	$35a^4b^3$	$35a^3b^4$	$21a^2b^5$	$7ab^6$	$1b^7$			
$1a^8$	$8a^7b$	$28a^6b^2$	$56a^5b^3$	$70a^4a^4$	$56a^3b^5$	$28a^2b^6$	$8ab^7$	$1b^8$		
$1a^9$	$9a^8b$	$36a^7b^2$	$84a^6b^3$	$26a^5a^4$	$126a^4b^5$	$84a^3b^6$	$36a^2b^7$	$9ab^8$	$1b^9$	
$1a^{10}$	$10a^9c$	$45a^8b^2$	$120a^7b^3$	$252a^6b^4$	$210a^5b^5$	$210a^4b^6$	$120a^3b^7$	$45a^2b^8$	$10ab^9$	$1b^{10}$

so

so werdet ihr wahrnehmen, daß eine jede Dignität aus verschiedenen Producten zusammen gesetzt ist, und diese Producte durch verschiedene Zahlen multiplicirt werden. Es entstehen aber diese Producte, wenn ihr jeden Theil der Wurtzel zu allen niedrigern Dignitäten als die gegebene ist, erhebet, und sie verkehrt in einander multipliciret. Z. E. in der sechsten Dignität sind alle Dignitäten von 1 bis zu der sechsten der beyden Theile $a^6. a^5. a^4. a^3. a^2\, a\, 1.$ und $1\, b. b^2. b^3. b^4. b^5. b^6.$ Multipliciret die erstere Reihe in die andere, so bekommet ihr $a^6 + a^5b + a^4b^2 + a^3b^3 + a^2b^4 + ab^5 + b^6$, das ist, alle Producte, woraus die sechste Dignität besteht, ausser denen Zahlen, welche sie multipliciren, und nach dem Exempel des *Oughtred* (Clavis Mathematicæ c. 12. §. 6. p. m. 38.) sonderlich von denen Engelländern Unciæ genennet werden. Derowegen, wenn der Exponent m ist, so sind die Producte $a^m + a^{m-1}b + a^{m-2}b^2 + a^{m-3}b^3 + a^{m-4}b^4 + a^{m-5}b^5 + a^{m-6}b^6$ u. s. w. unendlich fort.

Die Unzen.

$1 + 1$
$1 + 2 + 1$
$1 + 3 + 3 + 1$
$1 + 4 + 6 + 4 + 1$
$1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1$
$1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1$
$1 + 7 + 21 + 35 + 35 + 21 + 7 + 1$
&c.

wer=

werden gefunden, wenn ihr die Exponenten der Dignitäten, welche in einander multiplicirt werden, unter einander schreibet, und den Bruch aus den zwo ersten Zahlen für die Unze des andern Gliedes, den Bruch aus den beyden ersten obern und beyden ersten untern Zahlen zur Unze des dritten Gliedes nehmet rc. Z. E. Es sollen die Unzen für die sechste Dignität gefunden werden: so schreibet die angeführten Exponenten dergestalt unter einander:

6. 5. 4. 3. 2. 1.
1. 2. 3. 4. 5. 6.

Alsdenn ist $\frac{6}{1} = 6$ die Unze des andern Gliedes, $\frac{6.5}{1.2} = 15$ die Unze des dritten, $\frac{6.5.4}{1.2.3} = 20$, die Unze des vierten, $\frac{6.5.4.3}{1.2.3.4} = 15$ die Unze des fünften, $\frac{6.5.4.3.2}{1.2.3.4.5} = 6$ die Unze des sechsten, und endlich $\frac{6.5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5.6} = 1$ die Unze des letzten Gliedes.

Auf eben solche Art werden die Unzen gefunden, wenn die Exponenten undeterminirt sind. Man schreibt sie nemlich dergestalt unter einander:

m.

$\frac{m.\,m-1.\,m-2.\,m-3.\,m-4.\,m-5.\,\text{rc.}}{1.\,2.\quad 3.\quad 4.\quad 5.\quad 6}$

und nimt $\frac{m}{1}$ für die Unze des andern Gliedes; $\frac{m.\,m-1}{1.\,2.}$ für die Unze des dritten, $\frac{m.\,m-1.\,m-2.}{1.\,2.\quad 3.}$ für die Unze des vierten, $\frac{m.\,m-1.\,m-2.\,m-3.}{1.\,2.\quad 3.\quad 4.}$ für die Unze des fünften $\frac{m.\,m-1.\,m-2.\,m-3.\,m-4.}{1.\,2.\quad 3.\quad 4.\quad 5.}$ für die Unze des sechsten, $\frac{m.\,m-1.\,m-2.\,m-3.\,m-4.\,m-5}{1.\,2.\quad 3.\quad 4.\quad 5.\quad 6.}$ für die Unze des siebenden rc.

Wenn ihr nun diese Uncias in die oben gefundenen Producte multipliciret; so bekommet ihr für die Dignität m von $a+b$.

$$a^{m}+\frac{m}{1.}a^{m-1}b+\frac{m.\,m-1}{1.\,2.}a^{m-2}b^{2}+\frac{m\quad m-1\quad m-2.}{1.\,2.\quad 3.}a^{m-3}b^{3}+\frac{m\quad m-1.\,m-2.\,m-3.}{1.\,2.\quad 3.\quad 4.}a^{m-4}b^{4}+\frac{m.\,m-1.\,m-2.\,m-3.\,m-4.}{1.\,2.\quad 3.\quad 4.\quad 5.}a^{m-5}b^{5}+\frac{m.\,m-1.\,m-2.\,m-3.\,m-4.\,m-5.}{1.\,2.\quad 3.\quad 4.\quad 5.\quad 6.}a^{m-6}b^{6}\,\&c.$$

Das

Das ist, weil $a^{m-1} = a^m : a$, $a^{m-2} = a^m : a^2$, $a^{m-3} = a^m : a^3$, $a^{m-4} = a^m : a^4$ &c. (§. 39),

$$a^m + \frac{m a^m b}{1\, a} + \frac{m.m-1}{1.2}\,\frac{a^m b^2}{a^2} + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}\,\frac{a^m b^3}{a^3} + \frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.4}\,\frac{a^m b^4}{a^4} + \frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4}{1.2.3.4.5}\,\frac{a^m b^5}{a^5} + \frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.m-5}{1.2.3.4.5.6}\,\frac{a^m b^6}{a^6} \text{ \&c.}$$

Wenn ihr nun ferner $a = P$ und $b : a = Q$, das erste Glied $= A$, das andere $= B$, das dritte $= C$, das vierte $= D$, das fünfte $= E$ u. s. w. setzet; so findet ihr endlich $(P + PQ)^m = P^m + m\,AQ + \frac{m-1}{2}\,BQ + \frac{m-2}{3}\,CQ + \frac{m-3}{4}\,DQ + \frac{m-4}{5}\,EQ + \frac{m-5}{6}\,FQ$ u. s. w. unendlich fort.

Also habt ihr eine allgemeine Regel gefunden, nach welcher ihr eine jede binomische Wurzel zu einer jeden verlangten Dignität erheben könnet.

Die 1. Anmerckung.

92. Ihr verlanget die vierte Dignität von 18 oder

10

$10+8$, so ist $m=4$, $P=10$, $Q=8:10=4:5$, folglich $P^m = 10^4 = 10000 = A$.

$$m.\ AQ = 4.\ 10000.\ \tfrac{4}{5} = 32000 = B$$

$$\frac{m-1}{2} BQ = \tfrac{3}{2}.\ 32000.\ \tfrac{4}{5} = 38400 = C$$

$$\frac{m-2}{3} CQ = \tfrac{2}{3}.\ 38400.\ \tfrac{4}{5} = 20480 = D$$

$$\frac{m-3}{4} DQ = \tfrac{1}{4}.\ 20480.\ \tfrac{4}{5} = 4096 = E$$

$$\frac{m-4}{5} EQ = 0.\ 4096.\ \tfrac{4}{5} = 0 = F$$

$$\begin{array}{r} 10000 = A \\ 32000 = B \\ 38400 = C \\ 20480 = D \\ 4096 = E \\ \hline 104976 \end{array}$$

104976 vierte Dignität von 18.

Die 2. Anmerckung.

93. Ihr werdet vielleicht meinen, daß man mit leichter Mühe durch das gewöhnliche Multipliciren die gegebenen Zahlen zu der verlangten Dignität erheben kan, und dannenhero die gefundene allgemeine Regel für unnütz halten. Allein, ihr sollet zu seiner Zeit erfahren, wie sehr ihr euch in eurer Meinung betrogen habt, wenn ihr ihren vielfältigen Nutzen verspühren werdet. Jetzt erinnere ich nur dieses. Wenn ihr aus einer gegebenen Zahl eine verlangte Wurtzel ziehen sollet; so könnet ihr die Regeln nach welchen solches geschiehet, wie für die quadrat- und cubic-

Wurtzel (§. 80, 88) finden, wenn ihr durch die gefundene allgemeine Regel die binomische Wurtzel $a+b$ zu der gehörigen Dignität erhebet. Z. E. Ihr sollet die Wurtzel der fünften Dignität aus einer gegebenen Zahl ziehen; so dürfet ihr nur $a+b$ zu der fünften Dignität erheben. Das allgemeine Exempel wird euch die Regel bald an die Hand geben.

Die 3. Anmerckung.

94. Gleichwie ihr aber schon oben gesehen habt, daß die Regeln für die binomischen Wurtzeln auch dienen, eine polynomische Wurtzel zu der andern und dritten Dignität zu erheben (§. 81, 89); also gehet es auch an daß ihr nach dieser allgemeinen Regel, welche zwar eigentlich auch nur auf binomische Wurtzeln gerichtet ist, auf eine gleiche Weise eine jede polynomische Wurtzel zu der verlangten Dignität erhebet, und die Wurtzel selbst nach derselben findet: wie aus folgender Aufgabe zuersehen ist.

Die 28. Aufgabe.

95. *Eine allgemeine Regel zufinden, aus allen Dignitäten eine verlangte binomische Wurtzel zuziehen.*

Auflösung.

Weil $\sqrt[n]{x^m} = x^{m:n}$ (§. 42); so ist das Wurtzel-Ausziehen so viel, als eine Grösse zu einer Dignität erheben, welche zu ihrem Exponenten eine gebrochene Zahl hat. Derowegen, wenn ihr in der vorhin gefundenen Regel anstatt des Exponenten m den Exponenten $m:n$ setzet, so bekommet ihr eine allgemeine Regel, nach welcher so wohl jede Grösse zu einer verlangten Dignität erhoben, als aus

aus derselben eine verlangte Wurtzel gezogen werden kan. Es ist aber folgende:

$$\sqrt[n]{(P + PQ)^m} = P^{m:n} + \frac{m}{n} AQ + \frac{m-n}{2n} BQ$$
$$+ \frac{m-2n}{3n} CQ + \frac{m-3n}{4n} DQ + \frac{m-4n}{5n} EQ$$
$$+ \frac{m-5n}{6n} FQ$$ u. s. w. unendlich fort.

Die 1. Anmerckung.

96. Diese sehr nützliche Regel hat der vortrefliche Geometra in Engelland, *Isaac Newton*, zuerst gefunden, wiewohl auf eine andere Art, als ich gewiesen habe: wie solches aus dem Briefe erhellet, welchen er An. 1676 an den unvergleichlichen Mathematicum und Polyhistorem, den Herrn Reichs-Hof-Rath von Leibnitz, geschrieben, und *Wallisius* mit in den dritten Theil seiner mathematischen Wercke f. 622. hat drucken lassen. Es ist aber diese Regel einerley mit der vorigen. Denn, wie ihr m:n durch gantze Zahlen in dem Gebrauche derselben erklären könnet, wenn ihr n = 1 setzet: so könnet ihr auch in der vorigen Regel m durch einen Bruch erklären, wenn eine Wurtzel ausgezogen werden soll. Z. E. Ihr setzet $m = \frac{1}{2}$, wenn ihr die quadrat-Wurtzel verlanget; $m = \frac{1}{3}$, wenn ihr die cubic-Wurtzel suchet u. s. w.

Die 2. Anmerckung.

97. Damit ihr aber den Gebrauch der Regel deutlich erkennen möget: so will ich selbige mit einem Exempel erläutern. Ihr verlanget zu wissen die quadrat-Wurtzel aus $aa - x^2$: so ist $m = 1$, $n = 2$, $P = a^2$, $Q = -x^2 : a^2$, folglich:

$$P^{m:n} = a = A$$

$$+\frac{m}{n}AQ = \frac{1}{2}a - x^2 : a^2 = -\frac{x^2}{2a} = B$$

$$+\frac{m-n}{2n}BQ = \frac{1-2}{4} \cdot \frac{-x^2}{2a} \cdot \frac{-x^2}{a^2} = -\frac{x^4}{8a^3} = C$$

$$+\frac{m-2n}{3n}CQ = \frac{1-4}{6} \cdot \frac{-x^4}{8a^3} \cdot \frac{-x^2}{a^2} = -\frac{x^6}{16a^5} = D$$

$$+\frac{m-3n}{4n}DQ = \frac{1-6}{8} \cdot \frac{-x^6}{16a^5} \cdot \frac{-x^2}{a^2} = -\frac{5x^8}{128a^7} = E$$

$$+\frac{m-4n}{5n}EQ = \frac{1-8}{10} \cdot \frac{-5x^8}{128a^7} \cdot \frac{-x^2}{a^2} = -\frac{7x^{10}}{256a^9}\ \&c.$$

Demnach ist $\sqrt{(a^2 - x^2)} = a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} - \frac{7x^{10}}{256a^9}$ u. s. w. unendlich fort.

Die 3. Anmerckung.

98. Wenn man aus der gegebenen Grösse eine vollkommene Wurtzel haben kan, so ist die Zahl der Glieder allezeit endlich. Hingegen wo dergleichen nicht vorhanden ist, so gehen die Glieder unendlich fort. Man nimt aber von denselben so viele in jedem Falle als nöthig ist, bis nemlich durch Weglassung der übrigen kein mercklicher Fehler entstehet.

Die 4. Anmerckung.

99. Wenn einem die 27. und 28. Aufgabe zu schwehr vorkommen solte, der kan sie so lange bey Seite setzen, bis wir unten ihrer nöthig haben werden.

Die

Die 29. Aufgabe.

100. **Die Differentz zweyer Quadrate zufinden, derer Wurtzeln um 1 unterschieden sind.**

Auflösung.

Es sey die eine Wurtzel n, die andere $n+1$,
so ist das Quadrat der grössern n^2+2n+1,
——————— der kleinern n^2

die Differentz $2n+1$.

Wenn nun jede Zahl, zweymal genommen, eine gerade Zahl bringet, und eine gerade Zahl von einer ungeraden um 1 unterschieden ist; so ist die Differentz zweyer Quadrate, derer Wurtzeln um 1 unterschieden sind, eine ungerade Zahl, welche der Summe der Wurtzeln gleich ist. Es seyn die Wurtzeln 8 und 9, so ist die Differentz ihrer Quadrate $17=8+9$.

Der 1. Zusatz.

101. Also kan man durch blosse Addition die quadrat-Zahlen aller Zahlen in ihrer natürlichen Ordnung finden. Man darf nemlich nur zu dem vorhergehenden Quadrate beständig seine und zugleich die folgende Wurtzel addiren.

Der 2. Zusatz.

102. Die quadrat-Zahlen werden auch

in ihrer Ordnung nach einander gefunden, wenn man die ungeraden Zahlen in ihrer Ordnung zu einander addiret.

Wurtzeln.	ungerade Zahlen.	quad. Zahl.
1	1	1
2	3	4
3	5	9
4	7	16
5	9	25
6	11	36
7	13	49
8	15	64
9	17	81
10	19	100

Die 30. Aufgabe.

103. **Den Unterscheid zwoer cubic-Zahlen zufinden, deren Wurtzeln um 1 von einander unterschieden sind.**

Auflösung

Es sey die eine Wurtzel $= n$, die andere $n + 1$; so ist

die grössere cubic-Zahl $n^3 + 3n^2 + 3n + 1$
die kleinere n^3

der Unterscheid $3n^2 + 3n + 1$.

Das

Das ist, $n^2 + 2n + 1 + 2n^2 + n = (n+1)^2 + 2n^2 + n$. Also ist der verlangte Unterscheid die Summe aus dem Quadrate der grössern Wurtzel und dem Quadrate der kleinern zwey mal genommen, und der kleinern Wurtzel. Z. E. Es seyn die Wurtzeln 8 und 9; so ist der Unterscheid ihrer cubic-Zahlen $217 = 81 + 128 + 8 = 9^2 + 2.8^2 + 8$.

Setzet ferner die dritte Wurtzel $n+2$; so ist die cubic-Zahl

	$n^3 + 6n^2 + 12n + 8$
Die vorige	$n^3 + 3n^2 + 3n + 1$
Der Unterscheid	$3n^2 + 9n + 7$
Der erste Untersch.	$3n^2 + 3n + 1$
Der andere Untersch.	$6n + 6 = 6(n+1)$.

Also ist der andere Unterscheid zwoer cubic-Zahlen die Wurtzel der kleinern 6 mal genommen.

Zusatz.

104. Wenn man also die quadrat-Zahlen in ihrer Ordnung nach einander gefunden hat (§. 101, 102); so kan man daraus die cubic-Zahlen durch blosse Addition finden aus dem ersten Unterscheide. Oder, wenn man die cubic-Zahlen ohne die quadrat-Zahlen finden will; so addirt man erstlich den anderen Unterscheid 1. 6. 12. 18. 24. 30 ꝛc. um den erstern zufinden, und darnach den erstern Unter-

scheid, um die cubic-Zahlen zu erhalten, wie aus dem beygesetzten Täflein abzunehmen ist.

Wurzeln.	anderer Unterscheid.	erster Unterscheid.	cubic-Zahlen.
1	1	1	1
2	6	7	8
3	12	19	27
4	18	37	64
5	24	61	125
6	30	91	216
7	36	127	343
8	42	169	512
9	48	217	729
10	54	271	1000

Die 31. Aufgabe.

105. Zu finden, was vor eine Zahl heraus kommt, wenn man eine gerade Zahl zu einer ungeraden addiret, oder sie von einander abziehet, oder auch durch ein-einander multiplicirt.

Auflösung.

Weil eine gerade Zahl sich in zween gleiche Theile theilen läßt, eine ungerade aber um 1 von einer geraden unterschieden ist; so nennet die gerade Zahl $2x$, die ungerade $2y+1$

$$\begin{array}{lll} 2y+1 & 2y+1 & 2y+1 \\ 2x & 2x & 2x \\ \hline \text{Sum. } 2x+2y+1 & \text{Diff. } 2y+1-2x & \text{Prod. } 4xy+2x \end{array}$$

Die

Die Summe und Differentz sind ungerade Zahlen, das Product ist eine gerade Zahl. Denn dieses läßt sich halbiren, jene nicht.

Die 32. Aufgabe.

106. **Zufinden, was vor eine Zahl heraus kommt, wenn man eine gerade Zahl zu einer geraden addirt, oder sie von einander subtrahirt, oder auch durch einander multiplicirt.**

Auflösung.

Es sey die eine gerade Zahl $2x$, die andere $2y$. So ist die Summe $2x+2y$, die Differentz $2x-2y$, das Product $4xy$: und also sind alle drey gerade Zahlen, denn sie lassen sich halbiren.

Die 33. Aufgabe.

107. **Zufinden, was vor Zahlen herauskommen, wenn ihr eine ungerade Zahl zu einer ungeraden addiret, oder sie von einander subtrahiret, oder auch durch einander multipliciret.**

Auflösung.

Es sey die eine ungerade Zahl $2x+1$, die andere $2y+1$.

$$\begin{array}{r} 2x+1 \\ 2y+1 \\ \hline \text{Summe} = 2x+2y+2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2x+1 \\ 2x+1 \\ \hline \text{Differ.} = 2x-2y \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2x + 1 \\ 2y + 1 \\ \hline + 2x + 1 \\ 4xy + 2y \quad\quad \\ \hline \end{array}$$

Product $= 4xy + 2x + 2y + 1$.
Die Summe und Differentz lassen sich halbiren, sind also gerade Zahlen. Das Product läßt sich nicht halbiren: ist also eine ungerade Zahl.

Die 34. Aufgabe.

108. *Zufinden, was vor Zahlen heraus kommen, wenn ihr lauter gerade Zahlen, oder eine gerade Anzahl ungerader Zahlen, oder auch eine ungerade Anzahl ungerader Zahlen addiret.*

Auflösung.

Es seyn die gerade Zahlen $2x$, $2y$, $2z$, $2t$ u. s. w. so ist die Summe $2x + 2y + 2z$, $+ 2t$ u. s. w. das ist $2(x + y + z + t$ rc.) also eine gerade Zahl. Derowegen *die Summe von lauter geraden Zahlen ist eine gerade Zahl.*

Es seyn die ungeraden Zahlen $2x+1$, $2y+1$, $2z+1$, $2t+1$. u. s. w. ihre Anzahl $2m$. So ist ihre Summe $2x+2y+2z+2t$ u. s. w. $+2m$, das ist $2(x+y+z+t$ rc.)$+2m$, folglich eine gerade Zahl. Derowegen wenn

wenn lauter ungerade Zahlen in gerader Anzahl zusammen addirt werden, so ist die Summe eine gerade Zahl.

Es seyn die ungeraden Zahlen abermals $2x+1$, $2y+1$, $2z+1$, $2t+1$ u. s. w. ihre Anzahl $2m+1$. So ist ihre Summe $2x+2y+2z+2t$ u. s. w. $+2m+1$, das ist, $2(x+y+z+t$ 2c.$)+2m+1$, folglich eine ungerade Zahl. Derowegen, wenn lauter ungerade Zahlen in ungerader Anzahl zusammen addiret werden, so ist die Summe eine ungerade Zahl.

Anmerckung.

109. Wenn diese Aufgaben gleich sonst keinen Nutzen hätten, so solten sie euch doch angenehm seyn, weil sie euch eine neue Maxime der Benennung an die Hand geben. Ihr werdet auch bey andern Gelegenheiten ihren Nutzen verspühren. Z. E. wenn einer verlanget, ihr soltet 20 in 5 ungerade Zahlen theilen; so werdet ihr bald sehen, daß dieses unmöglich sey, weil ungerade Zahlen in ungerader Anzahl eine ungerade Zahl bringen, wenn sie summiret werden.

Die 35. Aufgabe.

110. **Zu finden, was vor eine Dignität herauskommt, wenn man eine quadrat- oder cubic-Zahl durch sich selbst multiplicirt.**

Auflösung.

Es sey die quadrat-Zahl x^2, die cubic-Zahl x^3. Multipliciret jede durch sich selbst, so kommt in dem erstern Falle x^4, in dem andern x^6.

Weil

Weil der Exponent 4 sich durch 2, der Exponent 6 aber so wohl durch 2 als durch 3 sich dividiren läßt; so ist x^4 ein Quadrat, x^6 aber zugleich eine quadrat- und eine cubic-Zahl. Derowegen, wenn eine quadrat Zahl durch sich selbst multiplicirt wird, so ist das Product eine vierte Dignität und quadrat-Zahl: Wenn eine cubic-Zahl durch sich selbst multiplicirt wird, so ist das Product zugleich eine quadrat- und auch eine cubic-Zahl.

Anmerckung.

111. Auf diese Manier könnet ihr noch gar viel andere dergleichen Lehrsätze finden, wenn ihr dieselben nöthig habt.

Die 36. Aufgabe.

112. Zufinden, wie groß in einer arithmetischen Progression die Summe der beyden äussersten Glieder sey.

Auflösung.

Es sey das erstere Glied a, der Unterscheid der Glieder d, so ist die Progression (§. 69 *Arithm.*).

$$a.\ a+d.\quad a+2d.\quad a+3d.\quad a+4d.\quad a+5d$$

$$\frac{a+5d \;\; (a+4d)}{} \qquad (a+4d)+(a) \ldots$$

$$\begin{array}{ccccc} a+4d & & a+2d & & a \\ \hline 2a+5d & = & 2a+5d & = & 2a+5d \end{array}$$

$$a.\ a+d.\quad a+2d.\quad a+3d.\quad a+4d$$

$$\begin{array}{ccccc} a+3d. & & 2 & & a \\ \hline 2a+4d & = & 2a+4d & = & 2a+4d. \end{array}$$

Lehr-

Lehrsatz.

In einer arithmetischen Progreßion ist die Summe der beyden äussersten Glieder der Summe jeder zweyen Glieder gleich, welche von den äussersten gleich weit abstehen, ingleichen zweymal so groß als das mittlere, wenn die Glieder an der Zahl ungleich sind.

Z. E.	3	6	9	12	15	18	21
				12	9	6	3
				24	=24	=24	=24.

Der 1. Zusatz.

113. Derowegen bekommet ihr die Summe der gantzen Progreßion, wenn ihr die Summe des ersten und letzten Gliedes durch die halbe Zahl der Glieder multipliciret. Es sey das erste Glied a, die Differentz d, die Zahl der Glieder n, so ist das letzte Glied $a + (n-1)d$, folglich die Summe der Progreßion $(2a + (n-1)d)\frac{1}{2}n = an + (n^2 - n)\frac{1}{2}d$. Es sey z. E. $a=3$, $n=7$, $d=3$, so ist die Summe der Progreßion $21 + (49-7)\frac{3}{2} = 21 + 42 \cdot \frac{3}{2} = 21 + 21 \cdot 3 = 21 + 63 = 84$.

Der 2. Zusatz.

114. Ihr könnet demnach die Summe einer arithmetischen Progreßion finden, wenn euch

euch das erste Glied, der Unterscheid und die Zahl der Glieder gegeben sind.

Der 3. Zusatz.

115. Es sey $a=1$, $d=2$, die Zahl der Glieder $=n$; so ist die Summe der Progression $n+n^2-n=n^2$: woraus von neuem erhellet, daß die quadrat=Zahlen heraus=kommen, wenn man die ungeraden Zahlen, das ist, die Glieder in der arithmetischen Progression 1, 3, 5, 7, 9, 11 u. s. w. zusammen addirt.

Der 4. Zusatz.

116. Es sey $a=\frac{1}{2}d$, das ist, das erste Glied sey dem halben Unterscheide der Glieder gleich; so ist die Summe der Progression $an+an^2-an=an^2$.

Der 5. Zusatz.

117. Es sey $a=n=\frac{1}{2}d$ d s ist, das erste Glied, die Zahl und der halbe Unterschied der Glieder sind einander gleich; so ist die Summe $n^2+n^3-n^2=n^3$, das ist der Cubus von dem ersten Gliede. Z. E. $a=n=\frac{1}{2}d=8$, oder die Progression 8, 24, 40, 56, 72, 88, 104, 120; so ist die Summe 512 oder die cubic=Zahl von 8.

Anmerckung.

118. Hieraus erhellet, wie man aus allgemeinen Lehrsätzen besondere finden kan.

Die

Die 37. Aufgabe.

119. **Aus dem ersten und letzten Gliede einer arithmetischen Progreßion und dem Unterscheide der Glieder, ihre Zahl und die Summe der Progreßion zufinden.**

Auflösung.

Es sey das erste Glied $= a$, die Zahl der Glieder $= x$,
das letzte $= b$, die Summe $= y$,
der Unterscheid $= d$;
So ist (§. 113)

$$b = a + dx - d \qquad y = \tfrac{1}{2}(b + a)x$$

$$b - a + d = dx \qquad = \frac{(b+a)(b-a)}{2d} + \tfrac{1}{2}(b+a)$$

$$\frac{b-a}{d} + 1 = x \quad = \frac{b^2 - a^2}{2d} + \frac{b+a}{2}.$$

Es sey z. E. $a = 2$, $b = 17$, $d = 3$, so ist $x = (17 - 2) : 3 + 1 = 15 : 3 + 1 = 6$, und $y = \tfrac{1}{2}(17 + 2) + (289 - 4) : 6 = \tfrac{19}{2} + \tfrac{285}{2} = 9\tfrac{1}{2} + 47\tfrac{1}{2} = 57$.

Probe: Denn $a + dx - d = 2 + 3 . 6 - 3 = 2 + 18 - 3 = 2 + 15 = 17$, und $\tfrac{1}{2}(b + a)x = \tfrac{6}{2}(17 + 2) = 3 . 19 = 57$.

Die 38. Aufgabe.

120. **Aus dem ersten Gliede, dem Unterscheide der Glieder, und der Summe einer arithmetischen Progreßion, die Zahl der Glieder und das letzte Glied zufinden.**

Auf-

Auflösung.

Es sey das erste Glied $= a$, die Zahl der Glieder $= x$,
der Unterscheid $= d$, das letzte Glied $= y$,
die Summe $= c$;
So ist (§. 113)

$$\tfrac{1}{2}x(a + y) = c \qquad a + dx - d = y$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad} \; 2$$

$$ax + xy = 2c$$

$$xy = 2c - ax$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad} \; x$$

$$y = (2c - ax) : x,$$ folglich:

$$(2c - ax) : x = a + dx - d$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad} \; x$$

$$2c - ax = dx^2 + ax - dx$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad} \; d$$

$$2c : d = x^2 + \frac{(2a - d)}{d}x.$$

Setzet $(2a - d) : d = m$, so ist

$$2c : d = x^2 + mx$$

$$\tfrac{1}{4}m^2 \quad \tfrac{1}{4}m^2 \quad (\S.\ 83)$$

$$\tfrac{1}{4}m^2 + 2c : d = x^2 + mx + \tfrac{1}{4}m^2$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}m^2 + 2c : d)} = + \tfrac{1}{2}m + x$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}m^2 + 2c : d)} - \tfrac{1}{2}m = x.$$

Oder

Oder $x = \sqrt{\left(\frac{4a^2 - 4ad + d^2}{4d^2} + \frac{2c}{d}\right)} - \frac{2a + d}{2d}$

folglich

$$y = \sqrt{(2cd + a^2 - ad + \tfrac{1}{4}d^2)} - \tfrac{1}{2}d$$
$$= \sqrt{(2cd + (a - \tfrac{1}{2}d)^2)} - \tfrac{1}{2}d.$$

Es sey $a=2$, $d=3$, $c=57$, so ist $m=(4-3):3=\frac{1}{3}$, folglich $x=\sqrt{(\frac{1}{36}+\frac{114}{3})}-\frac{1}{6}=\sqrt{\frac{1369}{36}}-\frac{1}{6}=\frac{37}{6}-\frac{1}{6}=\frac{36}{6}=6$. Ferner ist $y=\sqrt{(342+\frac{1}{4})}-1\frac{1}{2}=18\frac{1}{2}-1\frac{1}{2}=17$.

Probe: Denn $(2+17)\,3=3.\,19=57$, und $2+3.\,6-3=2+18-3=17$.

Die 39. Aufgabe.

121. **Aus dem ersten und letzten Gliede und der Summe einer arithmetischen Progression, die Zahl und den Unterscheid der Glieder zufinden.**

Auflösung.

Es sey das erste Glied $=a$, die Zahl der Glieder $=x$,
das letzte $=b$, der Untersch. $=y$,
die Summe $=c$.

So ist (§. 113.)

$\frac{1}{2}x(a+b)=c$	$a+xy-y=b$
$x(a+b)=2c$	$xy-y=b-a$
$x=2c:(a+b)$	$xy=b+y-a$
	$x=(b+y-a):y.$

Folglich:

$$2c:(a+b)=(b+y-a):y$$

$$\overline{}\ y$$

$$2cy:(a+b)=b+y-a$$

$$\overline{}\ a+b$$

$$2cy=ab+ay-a^2+b^2+by-ab$$

$$2cy-ay-by=b^2-a^2$$

$$\overline{}\ 2c-a-b$$

$$y=(b^2-a^2):(2c-a-b).$$

Es sey $a=2, b=17, c=57$, so ist $x=114:(2+17)=114:19=6$, und $y=(289-4):(114-19)=285:95=3$.

Probe: Denn $3(2+17)=3.19=57$, und $2+3.6-3=2+18-3=17$, wie vorhin (§. 120).

Die 40. Aufgabe.

122. **Aus dem Unterscheide und der Zahl der Glieder, ingleichen der Summe einer arithmetischen Progression, das erste und letzte Glied, und folglich alle übrigen zufinden.**

Auflösung.

Es sey die Zahl der Glieder $=n$, das erste Glied$=x$,
der Unterscheid $=d$, das letzte$=y$,
die Summe $=c$.
So ist (§. 113.)

$\frac{1}{2}n$

$\frac{1}{2}n\,(x+y)=c$ $\qquad$ $y=x+nd-d$

$\cdot 2$

$n\,(x+y)=2c$

$: n$

$x+y=2c:n$

$y=2c:n-x.$ Folglich:

$2c:n-x=x+nd-d$

$2c:n+d-nd=2x$

$c:n+\frac{1}{2}(d-nd)=x.$

Es sey $n=6$, $d=3$, $c=57$, so ist $x=\frac{57}{6}+\frac{3-18}{2}=\frac{57}{6}+9-9=\frac{66}{6}-9=11-9=2$, und $y=\frac{114}{6}-2=19-2=17.$

Die Probe ist wie vorhin (§. 120.).

Die 41. Aufgabe.

123. **Aus dem Unterscheide der Glieder, dem letzten Gliede und der Summe einer arithmetischen Progreßion, das erste Glied und die Zahl der Glieder zufinden.**

Auflösung.

Es sey das letzte Glied $=b$, das erste Glied $=x$,
der Unterscheid $=d$, die Zahl der Glieder $=y$,
die Summe $=c$.

So ist (§. 113.)

$$\frac{1}{2}y(x+b)=c \qquad b=x+dy-d$$

$$y(x+b)=2c \qquad b+d-dy=x.$$

$$x+b=2c:y.$$

$$x=\frac{2c}{y}-b,$$

Folglich:

$$\frac{2c}{y}-b=b+d-dy$$

$$2c-by=by+dy-dy^2$$

$$dy^2-2by-dy=-2c$$

$$y^2-\frac{(2b+d)}{d}y=-2c:d.$$

Setzet $(2b+d):d=m$, so ist

$$y^2-my=-2c:d$$

$$\frac{1}{4}m^2. \qquad \frac{1}{4}m^2 \text{ (§. 83.)}$$

$$y^2-my+\frac{1}{4}m^2=\frac{1}{4}m^2-2c:d$$

$\frac{1}{2}m-y$ oder $y-\frac{1}{2}m=\sqrt{(\frac{1}{4}m^2-2c:d)}$

$$y=\frac{1}{2}m\pm\sqrt{(\frac{1}{4}m^2-2c:d)}$$

$$y=\frac{2b+d}{2d}\pm\sqrt{\left(\frac{4b^2+4bd+d^2}{4d^2}-\frac{2c}{d}\right)}$$

$$=\frac{2b+d\pm\sqrt{(4b^2+4bd+d^2-8cd)}}{2d}$$

Folg-

Folglich:

$$x = b + d - b - \tfrac{1}{2}d \mp \tfrac{1}{2}\sqrt{(4b^2 + 4bd + d^2 - 8cd)}$$

$$= \tfrac{1}{2}d \mp \tfrac{1}{2}\sqrt{(4b^2 + 4bd + d^2 - 8cd)}$$

Es ist aber $4b^2 + 4bd + d^2 = (2b + d)^2$.

Es sey $b = 17$, $d = 3$, $c = 57$, so ist $2b + d = 34 + 3 = 37$, folglich $y = \frac{37 - \sqrt{(1369 - 1368)}}{6} = \frac{37 - 1}{6} = \frac{36}{6} = 6$, und $x = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2$.

Die Probe ist wie vorhin (§. 120.).

Die 42. Aufgabe.

124. **Aus der Summe einer arithmetischen Progression, der Zahl der Glieder und dem Producte aus dem ersten Gliede in das letzte, die Glieder zufinden.**

Auflösung.

Es sey das Product $= a$, das erste Glied $= x$,
die Zahl der Glieder $= n$, das letzte $= y$,
die Summe $= c$.

So ist

$\frac{1}{2}n(x + y) = c$ (§. 113.) | 2 $\qquad$ $a = xy$ | x

$n(x + y) = 2c$ | n $\qquad$ $a : x = y$.

$x + y) = 2c : n$

$y = \frac{2c}{n} - x$,

Folglich:

$$a : x = 2c : n - x \quad | \; x$$

$$a = \frac{2cx}{n} - x^2$$

$$x^2 - \frac{2cx}{n} = -a$$

$$c^2 : n^2 \qquad c^2 : n^2$$

$$x^2 - \frac{2cx}{n} + c^2 : n^2 = c^2 : n^2 - a$$

$$\pm \frac{c}{n} \pm x = \sqrt{\left(\frac{c^2}{n^2} - a\right)}$$

$$\frac{c}{n} \mp \sqrt{\left(\frac{c^2}{n^2} - a\right)} = x.$$

Nemlich wenn man das Zeichen — braucht, so bekommt man x; wenn man das Zeichen + brauchet, bekommt man y.

Es sey $c = 57$, $n = 6$, $a = 34$, so ist $x = \frac{57}{6} - \sqrt{\left(\frac{3249}{36} - 34\right)} = \frac{57}{6} - \sqrt{\left(\frac{3249 - 1224}{36}\right)}$ $= \frac{57}{6} - \sqrt{\frac{2025}{36}} = \frac{57}{6} - \frac{45}{6} = \frac{12}{6} = 2$, und hingegen $y = \frac{57 + 45}{6} = \frac{102}{6} = 17.$

Probe:

Probe: Denn $\frac{6}{2}(2+17)=3.19=57$, und $2.17=34$.

Die 8. Erklärung.

125. *Wenn man etliche Glieder von einer arithmetischen Progression, welche sich von 1 anfänget, zu einander addiret; so heißt die Summe eine polygonal-Zahl* (Numerus Polygonus).

Die 9. Erklärung.

126. *Insbesondere heißt es eine triangular-Zahl, wenn die Differentz der Glieder in der Progression 1 ist; eine quadrat-Zahl, wenn sie 2 ist; eine pentagonal-Zahl, wenn sie 3 ist; eine hexagonal-Zahl, wenn sie 4 ist; u. s w.*

Arithm. Progr.	1,2,3, 4, 5, 6, 7, 8
Triang. Zahlen	1,3,6,16,15,21,28,36
Arithm. Progr.	1,3,5, 7, 9,11,13,15
Quadr. Zahlen	1,4.9,16,25,36,49,64
Arithm. Progr.	1,4,7,10,13,16,19.22
pentagonal Zahl	1,5,12.22,35,51,70,92
Arithm. Progr.	1,5 9,13,17,21,25,29
hexagonal-Zahl	1.6,15,28,45,66,91,120.

Anmerckung.

127. Ihr werdet ins künftige erfahren, daß es nicht ohne Nutzen sey, wenn man allerhand Progressionen der Zahlen summiren lernt. Zu dem Ende wollen wir auch untersuchen, wie man die polygonal-Zahlen summiren kan.

Die 10. Erklärung.

128. **Die Seite der polygonal-Zahl heißt die Zahl der Glieder, welche von der Progression sind summirt worden, damit dieselbe entstanden ist.**

Anmerckung.

129. Die polygonal-Zahlen haben ihren Nahmen von den regulären Figuren, in welche sich die Einheiten, woraus sie bestehen, versetzen lassen. Es kommen aber in die Seite der Figur jederzeit so viel Einheiten oder Puncte (durch welche sie angedeutet werden) als Glieder von der Progression summiret worden sind, damit man die polygonal-Zahl bekomme.

Die 11. Erklärung.

130. **Durch die Zahl der Winckel verstehen wir diejenige, welche andeutet, wie viel Winckel die Figur hat, von welcher die polygonal-Zahl ihren Nahmen bekommt.**

Der 1. Zusatz.

131. Also ist die Zahl der Winckel in trigonal-Zahlen 3; in quadrat- oder tetragonal-Zahlen 4; in pentagonal-Zahlen 5 u. s. w.

Der 2. Zusatz.

132. Da nun in trigonal-Zahlen der Unterscheid der Glieder 1, in quadrat-Zahlen 2, in pentagonal-Zahlen 3 u. s. w. ist; so ist die Zahl der Winckel jederzeit um 2 grösser als der Unterscheid der Glieder in der Progression, durch deren Summirung die polygonal-Zahlen entstehen.

Die

Die 43. Aufgabe.

133. Aus der gegebenen Seite einer polygonal-Zahl und der Zahl der Winckel die polygonal-Zahl zufinden.

Auflösung.

Es sey die Seite $=a$,
Die Zahl der Winckel $=n$,
das erste Glied der Progr. ist $=1$ (§. 125)
der Unterscheid der Glieder $=n-2$ (§. 132)
das letzte Glied $1+(n-2)(a-1)$ (§. 113)
$=an-2a-n+3$
das erste Glied $=1$.

Summe des ersten und letzten $an-2a-n+4$
halbe Zahl der Glieder $\frac{1}{2}a$ (§. 128).

polygonal-Zahl $\frac{1}{2}a^2n-a^2-\frac{1}{2}an+2a$ (§. 113)
$=\frac{a^2n-2a^2-an+4a}{2}=\frac{(n-2)a^2-a(n-4)}{2}$

Es sey $n=3$, so ist die trigonal-Zahl $=\frac{1a^2+1a}{2}$.

Es sey $n=4$, so ist die tetragonal-Zahl $=\frac{2a^2-0a}{2}=a^2$.

Es sey $n=5$, so ist die pentagonal-Zahl $=\frac{3a^2-1a}{2}$.

Es sey $n-6$, so ist die hexagonal = Zahl $= \frac{4a^2-2a}{2} = 2a^2-a$.

Es sey $n=7$, so ist die heptagonal = Zahl $= \frac{5a^2-3a}{2}$.

Es sey $n=8$, so ist die octogonal = Zahl $= \frac{6a^2-4a}{2} = 3a^2-2a$ u. s. w. unendlich fort.

Nemlich die um zwey verminderte Zahl der Winckel wird durch das Quadrat der Seite und die um 4 verminderte Zahl der Winckel durch die Seite der polygonal = Zahl multiplicirt; das letztere Product aber von dem erstern abgezogen, und der Rest durch zwey dividirt.

Exempel.

Ihr sollt die sechste trigonal = Zahl finden. Weil $a=6$; so ist $\frac{a^2+a}{2} = \frac{36+6}{6} = 18 + 3 = 21$. Wenn ihr die achte pentagonal = Zahl suchet; so ist $a=8$, nnd also $\frac{3a^2-a}{2} = \frac{3.64-8}{2} = 3.32-4 = 96-4 = 92$. Wenn ihr die fünfte hexagonal = Zahl suchet, so ist $a=5$, und also $2a^2-a = 50-5 = 45$.

Die

Die 44. Aufgabe.

134. **Aus der gegebenen polygonal-Zahl und der Zahl der Winckel die Seite zufinden.**

Auflösung.

Es sey die polygonal-Zahl $=p$, die Seite $=x$,
die Zahl der Winckel $=n$.
So ist der Unterscheid der Glieder $n-2$ (§. 132)
das erste Glied 1 (§. 125)
Derowegen das letzte $1+(x-1)(n-2)$
(§. 113, 128),
das ist $3+nx-2x-n$
das erste Glied 1,

Summe des ersten und letzten $4+nx-2x-n$
halbe Zahl der Glieder $\frac{1}{2}x$ (§. 128)

$2x+\frac{1}{2}nx^2-x^2-\frac{1}{2}nx.$

Derowegen ist:

$$\frac{1}{2}nx^2-x^2+2x-\frac{1}{2}nx=p$$

$$\overline{}\ 2$$

$$nx^2-2x^2-nx+4x=2p$$

$$\overline{}\ n-2$$

$$x^2-\left(\frac{n+4}{n-2}\right)x=\frac{2p}{n-2}.$$

Das ist, wenn $(n-4:(n-2)=m$

x^2-

$$x^2 - mx = 2p : (n-2)$$
$$\tfrac{1}{4}m^2 \qquad \tfrac{1}{4}m^2$$

$$x^2 - mx + \tfrac{1}{4}m^2 = \tfrac{1}{4}m^2 + 2p : (n-2)$$

$$x - \tfrac{1}{2}m = \sqrt{(\tfrac{1}{4}m^2 + 2p : (n-2))}$$

$$x = \tfrac{1}{2}m + \sqrt{(\tfrac{1}{4}m^2 + 2p : (n-2))}.$$

Das ist, wenn man vor m seinen Werth setzet,

$$x = \frac{n-4}{2n-4} + \sqrt{\left(\frac{n^2-8n+16}{4n^2-16n+16} + \frac{4p}{2n-4}\right)} = \frac{n-4+\sqrt{(8p(n-2)+(n-4)^2)}}{2n-4}$$

Es sey $n=3$; so ist $x = \frac{-1+\sqrt{(8p+1)}}{2}$.

Es sey $n=4$; so ist $x = \frac{0+\sqrt{(16p+0)}}{4}$.

Es sey $n=5$; so ist $x = \frac{1+\sqrt{(24p+1)}}{6}$.

Es sey $n=6$; so ist $x = \frac{2+\sqrt{(32p+4)}}{8}$.

Es sey $n=7$; so ist $x = \frac{3+\sqrt{(40p+9)}}{10}$.

Es sey $n=8$; so ist $x = \frac{4+\sqrt{(48p+16)}}{12}$.

u. s. w. unendlich fort.

Wenn

Wenn ihr diese polygonal-Zahlen betrachtet, so werdet ihr wahrnehmen, 1) daß überall die Zahl ausser dem Wurtzel-Zeichen, die um 4 verringerte Zahl der Winckel; und 2) daß die andere Zahl unter dem Wurtzel-Zeichen das Quadrat von dieser Zahl sey; 3) die erste aber dem Producte aus der polygonal-Zahl in den Divisorem 4 mal genommen, gleiche, und 4) der Divisor die Summe der Zahl ausser dem Wurtzel-Zeichen und der Zahl der Winckel ausmache.

Es sey 21 eine trigonal-Zahl: ihr sollt die Seite finden, das ist, die wie vielste sie in ihrer Ordnung ist. Weil $p=21$, so ist die verlangte Seite $\frac{-1+\sqrt{(168+1)}}{2} = \frac{-1+\sqrt{169}}{2} = \frac{-1+13}{2} = \frac{12}{2} = 6$. Es sey $p=45$ und zwar eine hexagonal-Zahl; so ist die verlangte Seite $\frac{2+\sqrt{(32\cdot45+4)}}{8} = \frac{2+\sqrt{1444}}{8} = \frac{2+38}{8} = \frac{40}{8} = 5$.

Zusatz.

135. Wenn ihr also nach und nach eine gegebene Zahl in die Stelle von p setzet; so werdet ihr sehen, ob sie mit unter die polygonal-Zahlen gehöre, und in welche Reihe dersel-

derselben sie zusetzen sey. Denn sie findet in allen Reihen statt, wo für ihre Seite eine ganze rational-Zahl heraus kommt. Also, wenn euch 21 wäre gegeben worden, so würdet ihr gefunden haben, daß es die sechste trigonal-Zahl sey.

Anmerckung.

136. Ihr dürfet aber nicht weiter versuchen, ob die gegebene Zahl sich für p setzen lasse, wenn ihr die Zahl der Winckel gleich wird, als in dem gegebenen Exempel 21.

Die 45. Aufgabe.

137. **Die Grösse des Products der beyden äussersten Glieder in einer geometrischen Proportion zudeterminiren.**

Auflösung.

Es sey in dem erstern Falle, wenn nur 3 Glieder sind, das erste $=a$, der Exponent $=m$, so ist die Proportion

$$\div a.\quad ma.\quad m^2a \quad (\text{§. } 66,\ 68\ \textit{Arithm.})$$

$$\begin{array}{cc} ma & a \\ \hline (ma)^2 = & m^2a^2 \end{array} \quad (\text{§. } 88\ \textit{Arithm.}).$$

Es sey in dem andern Falle, wenn 4 Glieder sind, das erste $=a$, der Exponent $=m$, das dritte $=b$, so ist die Proportion

$$a : ma = b : mb \quad (\text{§. } 66\ \textit{Arithm.})$$

$$\begin{array}{cc} b & a \\ \hline mab = & mab. \end{array}$$

Lehr-

Lehrsatz.

Wenn drey Grössen einander geometrisch proportional sind, so ist das Product der beyden äussersten dem Quadrate der mittlern gleich: sind aber vier einander proportional, so ist das Product der äussersten dem Producte der beyden mittlern gleich.

Anmerckung.

138. Von den Zahlen ist dieses schon in der Rechen-Kunst erwiesen worden (§. *109, 110 Arithm.*). Wir haben aber in der Geometrie solches mit Recht auch auf die Linien, Flächen und Cörper gedeutet, indem man alle Grössen als undeterminirte Zahlen ansehen kan (§ 9); welches nun durch gegenwärtige algebraische Rechnung noch mehr gerechtfertigt wird.

Die 46. Aufgabe.

139. **Drey geometrisch proportional-Grössen zufinden, aus dem gegebenen Producte des Quadrats der dritten in die erste und dem Exponenten.**

Auflösung.

Es sey das Product $= a$, die erste Grösse $= x$,
der Exponent $= m$, so ist die andere $= mx$.
die dritte $= m^2x$.

Folglich: $a = m^4x^3$

$a : m^4 = x^3$

$\sqrt[3]{(a : m^4)} = x$.

Es

Es sey $a=648$, $m=3$, so ist $x=\sqrt[3]{(648:81)}=\sqrt[3]{8}=2$, folglich $mx=6$, $m^2x=18$.

Probe: Denn $2.18=6.6=36$ (§. 137).

Die 47. Aufgabe.

140. **Aus der gegebenen Summe des ersten und vierten Gliedes in einer geometrischen Proportion, ingleichen der Summe des andern und dritten, und dem Exponenten, jedes Glied insbesondere zufinden.**

Auflösung.

Es sey die erste Summe $=a$, das erste Glied $=x$,
die andere $=b$, so ist das II $=mx$,
der Exponent $=m$, das III $=b-mx$,
das IV $=a-x$.

Folglich:

$$x : mx = b-mx : a-x$$

daher $ax-x^2=mbx-m^2x^2$ (§. 137)

$$\overline{ax-x^2=mbx-m^2x^2}\; x$$

$$a-x=mb-m^2x$$

$$m^2x-x=mb-a$$

$$\overline{}\; m^2-1 \; div.$$

$$x=(mb-a):(m^2-1).$$

Es sey $a=13$, $b=11$, $m=2$, so ist $x=\frac{22-13}{4-1}=\frac{9}{3}=3$, und $mx=6$, folglich

sind

sind die vier proportional-Zahlen $3:6=5:10$.

Probe: Denn $3.10=5.6=30$ (§. 137).

Die 48. Aufgabe.

141. **Aus der gegebenen Summe des ersten und letzten Gliedes und dem Exponenten in einer geometrischen Proportion von 3 Gliedern, die Glieder selbst zufinden.**

Auflösung.

Es sey die Summe $=a$, das erste Glied $=x$,
der Exponent $=m$, das andere $=mx$,
das dritte $=m^2x$.

Folglich: $a=m^2x+x$ (§. 137)
m^2+1 *div.*

$a:(m^2+1)=x$.

Es sey $a=50$, $m=2$, so ist $x=50:(4+1)=50:5=10$, $mx=20$, $m^2x=40$.

Probe: Denn $10.40=20.20=400$ (§. 137).

Die 49. Aufgabe.

142. **Zufinden, auf wie vielerley Art die Glieder einer geometrischen Proportion versetzet werden können, damit sie einander proportional verbleiben.**

Auflösung.

Versetzet sie auf alle mögliche Weise, und vergleichet ihre Summen, Unterscheide u. s. w. mit ihnen untereinander: so wer-

det ihr bald sehen, in welchen Fällen eine Proportion bleibt, wenn ihr nur acht gebet, ob in beyden Verhältnissen, welche mit einander verglichen werden, einerley Exponent ist (§. 65 *Arithm.*).

Es sey demnach $a : ma = b : mb$

so ist 1. (*alternatim*) $a : b = ma : mb$

2. (*inverse*) $ma : a = mb : b$

3. (*conversim*) $a + ma : a = b + mb : b$

4. (*composite*) $a + ma : ma = b + mb : mb$

5. (*divisim*) $ma - a : a = mb - b : b$

$ma - a : ma = mb - b : mb.$

Ferner 6. $a^2 : m^2a^2 = b^2 : m^2b^2$

oder überhaupt $a^n : m^n a^n = b^n : m^n b^n$

Jngleichen 7. $a : mac = b : mbc$

8. $a : \frac{ma}{c} = b : \frac{mb}{c}$

9. $ac : ma = bc : mb$

10. $\frac{a}{c} : ma = \frac{b}{c} : mb$

11. $ac : mac = b : mb$

12. $\frac{a}{c} : \frac{ma}{c} = b : mb$

13. $ac : mac = bd : mbd$

14. $\frac{a}{c} : \frac{ma}{c} = \frac{b}{d} : \frac{mb}{d}$

15. $ac : mad = bc : mbd$

16. $\frac{a}{c} : \frac{ma}{d} = \frac{b}{c} : \frac{mb}{d}.$

Es

Es sey *ordinate* $a : ma = b : mb$
und $ma : mna = mb : mnb$
so ist 17 *ex æquo* $a : mna = b : mnb$
es sey *perturbate* $a : ma = b : mb$
und $ma : mna = b : \frac{b}{n}$
so ist 18 *ex æquo* $a : mna = b : \frac{mb}{n}$.

Anmerckung.

143. Hier habt ihr ohne Mühe 18 sehr nützliche Lehrsätze gefunden, welche ihr euch wohl bekant machen müsset, wenn ihr ins künftige entweder die mathematischen Schriften zulesen, oder auch durch eigenes Nachsinnen mathematische Wahrheiten heraus zubringen gedencket. Denn die geometrische Proportion ist die Seele der mathematischen Wissenschaften. Der Beweiß beruhet darauf, weil überall einerley Exponent für eine angegebene Proportion heraus kommt, als in dem 3 Lehrsatze ist $\frac{a+ma}{a} = 1+m$ und $\frac{b+mb}{b} = 1+m$; in dem siebenden $\frac{a}{mac} = \frac{1}{mc}$ und $\frac{b}{mbc} = \frac{1}{mc}$; in dem siebenzehenden $\frac{a}{mna} = \frac{1}{mn}$ und $\frac{b}{mnb} = \frac{1}{mn}$. Ich halte es aber für unnöthig, die gefundenen Lehrsätze mit Wörtern auszudrucken, weil ein jeder das für sich selbst thun kan, wenn er Lust darzu hat. Z. E. der 1 Lehrsatz lautet also: **Wenn vier Grossen proportional sind, so verhält sich auch die**

erste zu der dritten, wie die andere zu der vierten. Der 11 wird so gegeben: Wenn ihr in einer geometrischen Proportion das erste und andere Glied durch eine Grösse multipliciret; so bleiben auch die veränderten Grössen den vorigen proportional.

Die 50. Aufgabe.

144. Zufinden, wie zwo Grössen verändert werden können, daß doch ihre erste Verhältniß gegen einander unverändert bleibt.

Auflösung.

Es seyn zwo Grössen a und ma, welche sich gegen einander verhalten wie 1 zu m; so ist:

I. $a : ma$
$\quad c \quad c$
$ac : mac = a : ma = 1 : m$

II. $a : ma$
$\quad c \quad c$
$\frac{a}{c} : \frac{ma}{c} = a : ma = 1 : m$

III. $a : ma$
$\quad b : mb$
$a - b : ma - mb = a : ma = b : mb = 1 : m$

IV. $a : ma$
$\quad b : mb$
$a + b : ma + mb = a : ma = b : mb = 1 : m.$

Lehr-

Lehrsatz.

1. Wenn ihr zwo Grössen durch eine dritte multipliciret, so verhalten sich die Producte gegen einander, wie die multiplicirten Grössen. 2. Wenn ihr zwo Grössen durch eine dritte dividiret, so verhalten sich die Quotienten wie dieselben Grössen. 3. Wenn sich die weggenommenen Theile gegen einander verhalten wie die ganze Grössen, so verhalten sich auch die übrigen Theile wie die ganzen Grössen. 4. Wenn die hinzugesetzten Grössen sich verhalten wie die Grössen, zu welchen sie addiret werden, so haben auch die Summen eben selbige Verhältniß.

Und dieses letztere gehet an, auch wenn vieler proportional-Grössen förder- und hinder-Glieder zu einander addiret werden. Z. E. Es sey $a : m = b : mb = c : mc = d : md = e : me$ &c. so ist $a + b + c + d + e$ &c. $: ma + mb + mc + md + me$ &c. $= a : ma = 1 : m$.

Die 51. Aufgabe.

145. Die Grosse des Products der beyden äussersten Glieder in einer geometrischen Progression zufinden.

Auflösung.

Es sey das erste Glied $= a$, der Exponent oder Nahme der Verhältniß $= m$, so ist die Progression.

$$a.\ ma.\ m^2a.\ m^3a.\ m^4a.\ m^5a.\ m^6a.$$

$$\frac{m^5a}{m^6a^2} = \frac{m^3a}{m^6a^2} = \frac{m^2a}{m^6a^2} = \frac{a}{m^6a^2}.$$

Lehrsatz.

In einer geometrischen Progression ist das Product der beyden äussersten Glieder dem Producte zweyer von den mittlern gleich, welche von den äussersten gleich weit abstehen, und dem Quadrate des mittlern, wenn sie an der Zahl ungleich sind. Und das letzte Glied in einer geometrischen Progression ist gleich dem Producte aus dem ersten Gliede in die Dignität des Exponenten, deren Grad um 1 weniger ist, als die Zahl der Glieder.

Die 52. Aufgabe.

146. Die Grösse des Quotienten zu determiniren, welcher heraus kommt, wenn der Unterscheid der beyden äussersten Glieder durch den um 1 verringerten Exponenten dividirt wird.

Auflösung.

Es sey das erste Glied $=a$, der Exponent $=m$, die Zahl der Glieder $=n$, so ist das letzte Glied $m^{n-1}a$, der Unterscheid des ersten und letzten $m^{n-1}a-a$. Dividiret denselben durch $m-1$, so kommt heraus $m^{n-2}a+m^{n-3}a+m^{n-4}a+m^{n-5}a+m^{n-6}a+m^{n-7}a$ u. s. w. Wenn demnach n eine deter-

determinirte Zahl ist, z. E. 7, so ist $n-7=0$ und demnach $m^{n-7}=m^0=1$, folglich $m^{n-7}a=a$. Solchergestalt ist der Quotient **die Summe aller Glieder weniger das letzte.**

$$m-1)\ m^{n-1}a-a\ \left(m^{n-2}a+m^{n-3}a+m^{n-4}a+m^{n-5}a+m^{n-6}a\ \&c.\right.$$

$$\underline{m^{n-1}a-m^{n-2}a}$$

$$+m^{n-2}a-a$$

$$\underline{+m^{n-2}a-m^{n-3}a}$$

$$+m^{n-3}a-a$$

$$\underline{m^{n-3}a-m^{n-4}a}$$

$$+m^{n-4}a-a$$

$$\underline{m^{n-4}a-m^{n-5}a}$$

$$+m^{n-5}a-a$$

$$\underline{m^{n-5}a-m^{n-6}a}$$

$$+m^{n-6}a-a.\ \text{u. s. f.}$$

Zusatz.

147. Wenn ihr demnach den Unterscheid des ersten und letzten Gliedes in einer geometrischen Progression durch den um 1 verringerten Exponenten dividiret, und zu dem Quotienten das letzte Glied addiret; so habt ihr die Summe der gantzen Progression. Es sey das erste Glied a, der Exponent m, die Zahl der Glieder n, so ist

ist das letzte Glied $m^{n-1}a$ Und demnach die Summe der Progression $m^{n-1}a + (m^{n-1}a - a) : (m-1)$, das ist, wenn $m=2$, $a=1$, $n=8$, $128 + 127 : 1 = 255$. Wenn ihr alles zu einer Benennung bringet, so ist die Summe $(m^n a - m^{n-1}a + m^{n-1}a - a) : (m-1) = (m^n a - a) : (m-1)$.

Die 53. Aufgabe.

148. **Aus dem gegebenen ersten und letzten Gliede, mit der Zahl der Glieder in einer geometrischen Progreßion, den Exponenten zufinden.**

Auflösung.

Es sey das erste Glied $=a$, der Exponent $=x$,
das letzte $=b$,
die Zahl der Glieder $=n$.
So ist $b = x^{n-1}a$ (§. 145)

$b : a = x^{n-1}$

$b^{1:(n-1)} \cdot a^{1:(n-1)} = x$.

Es sey $a=2$, $b=486$, $n=6$, so ist $x = \sqrt[5]{486} : \sqrt[5]{2} = \sqrt[5]{243} = 3$.

Probe: Denn $3^5 . 2 = 243 . 2 = 486$.

Die 54. Aufgabe.

149. **Aus dem gegebenen Exponenten, der Zahl der Glieder und der Summe der**

der geometrischen Progression, das erste Glied zufinden.

Auflösung.

Es sey der Exponent $=m$, das erste Glied $=x$,
die Zahl der Glieder $=n$; so ist das letzte $=m^{n-1}x$
die Summe $=c$. (§. 145)

Folglich:

$$c=(m^n x-x):(m-1)$$

$$\overline{\qquad\qquad} \quad m-1$$

$$mc-c=m^n x-x$$

$$\overline{\qquad\qquad} \quad m^n-1$$

$$(m-1)c:(m^n-1)=x.$$

Es sey $m=3$, $n=6$, $c=728$, so ist $x=2.728:728=2$.

Probe: Denn $(486-2):2+486=243-1+486=242+486=728$.

Die 55. Aufgabe.

150. **Aus dem ersten und letzten Gliede und dem Exponenten, die Zahl der Glieder in einer geometrischen Progression zufinden.**

Auflösung.

Es sey das erste Glied $=a$, die Zahl der Glieder $=x$,
das letzte $=b$,
der Exponent $=m$.

So ist $m^{x-1} a = b$, das ist, wenn ihr den Logarithmum von $a = la$ und den Logarithmum von $m = lm$ setzet,

$$xlm - lm + la = lb \quad (\S.\ 23\ Trig.)$$

$$xlm = lb - la + lm$$

$$\frac{\qquad\qquad}{lm}$$

$$x = \frac{lb - la}{lm} + 1.$$

Es sey $n = 2$, $b = 486$, $m = 3$, so ist

$$lb = 2.6866363$$
$$la = 0.3010300$$

$$lb - la = 2.3856063$$

$$\begin{array}{l|l} \quad 3\ 1\ 1 & \\ lb - la = 23858068 & 5 \\ lm = 4771213 & 1 \\ \hline & 6 = x. \end{array}$$

Probe: Denn 2. 243 = 486 (§. 145).

Die 56. Aufgabe.

151. **Eine unendliche Zahl Brüche zu summiren, deren Zehler Eins ist, die Nenner aber in einer geometrischen Verhältniß fortgehen.**

Auflösung.

Es sey der Nenner des ersten Bruches $= a$, der Exponent $= m$. Weil die Brüche unendlich abnehmen, so muß der letzte so klein

klein werden, daß er, in Ansehung des ersten, für nichts zuhalten ist. Und also ist die Differentz des ersten und letzten Gliedes dem ersten gleich, das ist, $1:a$, folglich die Summe $1:a+1:(ma-a)=(m-1+1):(ma-a)$ $=m:(m-1)a$.

Es sey $m=2$, so ist die Summe der Brüche $=2:a$, folglich $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}$ u. s. w. unendlich fort $=1$.

Es sey $m=3$, so ist die Summe der unendlichen Brüche $=3:2a$, folglich $\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}$ u. s. unendlich fort $=3:6=\frac{1}{2}$.

Es sey $m=4$, so ist die Summe der unendlichen Brüche $=4:3a$, folglich $+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}$ u. s. w. unendlich fort $=4:12=\frac{1}{3}$.

Die 57. Aufgabe.

152. **Die Summe unendlicher Brüche zufinden, deren gemeiner Zehler einer gegebenen Zahl gleich ist, die Nenner aber in einer geometrischen Progression fortgehen.**

Auflösung.

Es sey der gemeine Zehler $=b$, der Exponent der Nenner in der Progression $=m$, der Nenner des ersten Bruchs $=a$, so ist der erste Bruch $=\frac{b}{a}$. Weil nun der letzte Bruch aus der unendlichen Progression, in Ansehung des ersten, nichts ist, so ist der Unter

ter

terscheid dieser beyden $\frac{b}{a}$, folglich die Summe

$$\frac{b}{a}+\frac{b}{ma-a}=\frac{bm-b+b}{ma-a}=\frac{bm}{(m-1)a}.$$

Es sey $m=2$, $a=6$, $b=3$, so ist die Summe der Progression $=6:6=1$, das ist, $\frac{3}{6}+\frac{3}{12}+\frac{3}{24}$ u. s. w. unendlich fort.

Eben so findet ihr, daß $\frac{5}{7}+\frac{5}{21}+\frac{6}{63}$ u. s. w. unendlich fort $=15:14=1\frac{1}{14}$.

Ingleichen findet ihr, daß $\frac{3}{4}+\frac{3}{8}+\frac{3}{16}+\frac{3}{32}$ &c. $=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$.

Anmerckung.

153. Diese Aufgaben gehören in die Arithmeticam infinitorum, welche *Iohannes Wallisius* zuerst erfunden, und *Ismael Bullialdus* weiter ausgeführet hat: ich aber in meinen Elementis Analyseos Infinitorum zwar kurtz, jedoch viel allgemeiner als beyde abgehandelt habe. Allein, weil man dieselbe nicht mehr sonderlich nöthig hat, nachdem der Herr von Leibnitz seine differential- und integral-Rechnung bekannt gemacht; so wollen wir uns auch mit derselben nicht aufhalten.

Die 12. Erklärung.

154. Drey oder vier Grössen sind harmonisch proportional, wenn in dem ersten Falle der Unterscheid der ersten und andern sich verhält zu dem Unterscheide der andern und dritten, wie die erste zu der dritten: in dem andern Falle, wie der Unterscheid der ersten und andern zu dem Unterscheide der dritten und vierten, wie die

die erste zu der vierten. Dergleichen Zahlen sind 2, 3 und 6, denn 1:3=2:6.

Die 13. Erklärung.

155. Wenn in dem erstern Falle die Glieder vervielfältiget werden; so entstehet eine harmonische Progression.

Die 58. Aufgabe.

156. Zu zwo gegebenen Grössen die dritte harmonische proportional-Grösse zufinden.

Auflösung.

Es sey die erste $=a$, die dritte $=x$.
die andere $=b$,
So ist (§. 154).

$$b-a:x-b=a:x$$

$$ax-ab=bx-ax \quad (\S.\ 137).$$

$$2ax-bx=ab$$

$$2a-b$$

$$ab:(2a-b)=x.$$

Es sey $a=10$, $b=16$; so ist $x=160:(20-16)=160:4=40$.

Probe: Denn $16-10:40-16=6:24=10:40=1:4$.

Der 1. Zusatz.

157. Wenn $2a=b$; so ist $x=ab:o$, und also $1:o=x:ab$, folglich kan keine harmonische proportional-Grösse gefunden werden:

den: welches viel weniger angehet, wenn b grösser ist als $2a$.

Der 2. Zusatz.

158. Wenn man die dritte Grösse für die andere nimt; so kan man auf gleiche Weise die vierte finden, und so weiter fort. Die Glieder einer harmonischen Progression

$$a, b, \frac{ab}{2a-b}, \frac{ab}{3a-2b}, \frac{ab}{4a-3b}, \frac{ab}{5a-4b}, \frac{ab}{6a-5b}, \frac{ab}{7a-6b} \text{ \&c.}$$

Die 59. Aufgabe.

159. **Zwischen zwo gegebenen Grössen die mittlere harmonische proportional-Grösse zufinden.**

Auflösung.

Es sey die erste $=a$, die andere $=x$,
die dritte $=b$.
So ist (§. 154)

$$x-a : b-x = a : b$$

$$bx-ab = ab-ax \quad (\S.\ 137)$$

$$bx+ax = 2ab$$

$$x = 2ab : (a+b).$$

Es sey $a=10$, $b=403$; so ist $x=800:50$ $=16$.

Probe:

Probe: Denn $16-10:40-16=6:24=10:40=1:4$, wie vorhin (§. 156).

Die 60. Aufgabe.

160. **Zu drey gegebenen Grössen die vierte harmonische proportional-Grösse zufinden.**

Auflösung.

Es sey die erste $=a$, die vierte $=x$.
die andere $=b$,
die dritte $=c$,
So ist (§. 154.)

$$b-a:x-c=a:x$$

$$bx-ax=ax-ac \quad (§. 137)$$

$$ac=2ax-bx$$

$$2a-b$$

$$ac:(2a-b)=x.$$

Es sey $a=6$, $b=8$, $c=12$, so ist $x=72:(12-8)=72:4=18$.

Probe: Denn $8-6:18-12=2:6=6:18=1:3$ (§. 154).

Anmerckung.

161. Nachdem wir den Nutzen der Algebra in arithmetischen Exempeln gezeiget haben; so ist es Zeit, daß wir zu geometrischen Aufgaben schreiten.

Die 61. Aufgabe.

162. **Aus dem gegebenen Radio des Circuls ED die Seite des in ihm beschriebenen regulären Drey-Ecks AB zufinden.** Tab. I. Fig. 1

Auf-

Auflösung.

Es sey DB die Seite des Sechs-Ecks. Weil DB=BE (§. 135 *Geom.*), und bey F rechte Winckel sind (§. 125 *Geom.*); so ist auch DF=EF (§. 96 *Geom.*). Es sey demnach:

$DB = a, \quad BA = x.$

So ist $DF = \frac{1}{2}a \quad BF = \frac{1}{2}x.$

folglich $\frac{3}{4}aa = \frac{1}{4}xx$ (§. 172 *Geom.*).

$$\frac{\quad\quad\quad}{3aa = xx} \; 4$$

$$\frac{\quad\quad\quad}{\sqrt{3aa} = x.}$$

Tab. I. Fig. 2. Ihr findet demnach x, wenn ihr zwischen $3a$ und a die mittlere proportional-Linie suchet (§. 210 *Geom.*). Besser aber geschiehet es also: Aus A und B machet mit dem Diameter AB einen Durchschnitt in D, und ziehet aus dem Mittelpuncte C die Linie CD. Diese ist die Seite des Drey Ecks. Denn, da $DB^2 = 4a^2$, und $CB^2 = a^2$, so ist $DC^2 = 3aa$ (§. 172 *Geom.*; folglich $DC = \sqrt{3aa}$. Oder machet $AE = a$; so ist, wegen des rechten Winckels bey E (§. 115 *Geom.*), $EB = \sqrt{3aa}$ (§. 172 *Geom.*).

Der 1. Zusatz.

Tab. I. Fig. 1. 163. Weil $3aa = xx$, so ist $aa : xx = 1 : 3$, das ist, $DE^2 : AB^2 = 1 : 3$.

Der

Der 2. Zusatz.

164. Wenn die Seite des Drey-Ecks b gegeben ist, und ihr soltet den Radium des Circuls y finden, welcher um selbiges beschrieben werden kan; so habt ihr $3y^2=b^2$, und also ist $y=\sqrt{\frac{1}{3}b^2}$: folglich dürfet ihr nur zwischen der Linie AB (b) und dem dritten Theile derselben ($\frac{1}{3}b$) die mittlere proportional-Linie suchen (§. *210 Geom.*). Tab. I. Fig. 1.

Der 3. Zusatz.

165. Die halbe Seite AB, nemlich BF ist der Sinus des Bogens BD von 60° (§. *2 Trig.*). Derowegen könnet ihr durch gegenwärtige Aufgabe den Sinum von 60° finden (§. *11 Trigon. 112 Arithm.*).

Die 62. Aufgabe.

166. Aus dem gegebenen Radio des Circuls AC die Seite des in ihm beschriebenen regulären Acht-Ecks zufinden. Tab. I. Fig. 3.

Auflösung.

Es sey AC=BC=DC=a, BD=x; so ist AB=$\sqrt{2a^2}$ (§. *172 Geom.*).

BE=$\frac{1}{2}\sqrt{2a^2}$ (§. *125 Geom.*) =$\sqrt{\frac{1}{2}a^2}$ (§. 54).

EC = $\sqrt{(a^2-\frac{1}{2}a^2)}$ (§. *172 Geom.*) = $\sqrt{\frac{1}{2}a^2}$,

DE=$a-\sqrt{\frac{1}{2}a^2}$, folglich

$DE^2 = \frac{3}{2}a^2 - 2a\sqrt{\frac{1}{2}a^2}$
$BE^2 = \qquad \frac{1}{2}a^2$

$DB^2 = 2a^2 - 2a\sqrt{\frac{1}{2}a^2}$ (§. *172 Geom.*)

$DB = \sqrt{(2a^2 - 2a\sqrt{\frac{1}{2}a^2})}$.

Zusatz.

167. Die halbe Seite des Acht-Ecks ist der Sinus des Bogens von 22° 30′ (§. *2 Trig.*): diesen könnet ihr demnach durch gegenwärtige Aufgabe finden.

Die 63. Aufgabe.

Tab. I. Fig. 3.

168. Aus der gegebenen Seite des Acht-Ecks DB den Radium des Circuls AC zufinden, welcher um dasselbe beschrieben werden kan.

Auflösung.

Es sey $DB = b$, $BC = y$, so ist, vermöge dessen, was bey der vorhergehenden Aufgabe erwiesen worden,

$$b^2 = 2y^2 - 2y\sqrt{\tfrac{1}{2}y^2}$$

$$2y\sqrt{\tfrac{1}{2}y^2} = 2y^2 - b^2$$

$$2y^4 = 4y^4 - 4b^2y^2 + b^4$$

$$-b^4 = 2y^4 - 4b^2y^2$$

2

$$-\tfrac{1}{2}b^4 = y^4 - 2b^2y^2$$

$$b^4 \qquad b^4 \quad (\S.\ 83)$$

$$\tfrac{1}{2}b^4 = y^4 - 2b^2y^2 + b^4$$

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}b^4} = y^2 - b^2$$

$$b^2 + \sqrt{\tfrac{1}{2}b^4} = y^2$$

$$\sqrt{(b^2 + \sqrt{\tfrac{1}{2}b^4})} = \sqrt{(b^2 + b\sqrt{\tfrac{1}{2}b^2})} = y.$$

Tab. I. Fig. 4.

Eine geometrische Construction hat man zwar nicht nöthig, weil sie aus den Anfangs-Gründen der Geometrie leichter zuhaben ist. Doch kan man den Radium y und den Mittelpunct des Circuls aus dem gefundenen Werthe folgender Gestalt finden. 1) Theilet die Seite des Acht-Ecks AB in zween gleiche Theile in D, und beschreibet darüber einen halben Circul AFB; so ist AF=FB= $\sqrt{\tfrac{1}{2}b^2}$ (§. 172 *Geom.*). 2) Ziehet aus dem Mittelpuncte D durch F eine gerade Linie DC, welche auf AB perpendicular stehet. 3) Machet AE = 2AB + 2FB = $2b + 2\sqrt{\tfrac{1}{2}b^2}$, und beschreibet über AE einen halben Circul; so ist AC = $\sqrt{(b^2 + b\sqrt{\tfrac{1}{2}b^2})}$ oder der verlangte

langte Radius und in C der Mittelpunct des Circuls, welcher um das Acht-Eck beschrieben wird (§. *210 Geom.*).

Es ist auch nicht nöthig, daß man AFB und ACE beschreibt, denn man darf nur AD und DF einander gleich machen, BF in BH tragen, und mit HA den Perpendicul DC in C durchschneiden, so hat man den Mittelpunct C, woraus durch A und B der verlangte Circul beschrieben wird. Und diese Construction ist so beschaffen, daß man sie in die Anfangs-Gründe der Geometrie eintragen kan.

Die 64. Aufgabe.

Tab. I. Fig. 5.

169. **Aus dem gegebenen Radio des Circuls AC die Seite des Zehen-Ecks AB zufinden.**

Auflösung.

Weil AB$=\frac{1}{10}$ der Peripherie, so ist der Winckel ACB 36°, folglich sind die Winckel CAB und ABC ein jeder 72° (§. *109 Geom.*). Machet AD=AC, so ist jeder von den Winckeln ADC und DCA 36° (§. *101, 107 Geom.*): daher DCB 72°, und demnach BD:BC=BC:BA (§. *183 Geom.*). Es sey AC=BC=AD$=a$, AB$=x$, so ist BD$=a+x$, und dannenhero vermöge dessen, was erwiesen worden ist,

$a+x$

$$a+x : a = a : x$$

$$a^2 = ax + x^2$$
$$\tfrac{1}{4}a^2 = \tfrac{1}{4}a^2 \quad (\S. 83)$$

$$\tfrac{5}{4}a^2 = \tfrac{1}{4}a^2 + ax + x^2$$

$$\sqrt{\tfrac{5}{4}a^2} = \tfrac{1}{2}a + x$$

$$\sqrt{\tfrac{5}{4}a^2} - \tfrac{1}{2}a = x.$$

Richtet auf dem Diameter AB den Radium $DC = a$ aus dem Mittelpuncte C perpendicular auf (*§. 95 Geom.*), und theilet CB in 2 gleiche Theile in E (*§. 120 Geom.*); so ist $CE = \tfrac{1}{2}a$, und folglich $DE = \sqrt{\tfrac{5}{4}a^2}$ (*§. 172 Geom.*): machet $EF = DE$, so ist $CF = \sqrt{\tfrac{5}{4}a^2} - \tfrac{1}{2}a$. Tab. I. Fig. 6.

Anmerckung.

170. Auf solche Art lehret *Ptolæmeus* Almag. lib. 1. die Seite des Zehen-Ecks zufinden.

Die 65. Aufgabe.

171. Aus dem gegebenen Radio des Circuls DC, die Seite des Fünf-Ecks AB zufinden. Tab. I. Fig. 3.

Auflösung

Es sey $DC = a$ $\quad AB = x$

so ist $DB = \sqrt{\tfrac{5}{4}a^2} - \tfrac{1}{2}a$ (§. 169) $\quad BE = \tfrac{1}{2}x$

$EC = \sqrt{(a^2 - \tfrac{1}{4}x^2)}$

$DE = a - \sqrt{(a^2 - \tfrac{1}{4}x^2)}$.

Folglich:

$$DE^2 = 2a^2 - \frac{1}{4}x^2 - 2a\sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}x)}$$
$$BE^2 = \quad \frac{1}{4}x^2$$

also $DB^2 = 2a^2 - 2a\sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}x^2)}$

es ist auch $DB^2 = \frac{6}{4}a^2 - a\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$.

Daher $\frac{1}{2}a + a\sqrt{\frac{5}{4}a^2} - 2a\sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}x^2)} = 0$ (§. 31 Ar.)

$$\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}a^2} = 2\sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}x^2)}$$

$$\frac{6}{4}a^2 + a\sqrt{\frac{5}{4}a^2} = 4a^2 - x^2$$

$$x^2 = \frac{10}{4}a^2 - a\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$$
$$= a^2 + \frac{6}{4}a^2 - a\sqrt{\frac{5}{4}a^2}.$$

Tab. I. Fig. 5. Demnach $AB^2 = DC^2 + DB^2$, das ist, das Quadrat des regulären Funf-Ecks ist gleich dem Quadrate des Sechs Ecks und Zehn-Ecks, welche in einem Circul beschrieben sind, zusammen genommen. Daher, weil DC die Seite des Sechs-Ecks, und FC die Seite des Zehn-Ecks (§. 169); so ist DF die Seite des Fünf-Ecks. Tab. I. Fig. 6.

Anmerckung.

172. *Ptolomæus* lehret abermal die Seite des Fünf-Ecks auf solche Art finden.

Zusatz.

173. Die halbe Seite des Fünf-Ecks ist der Sinus von 36°, die halbe Seite des Zehn-

Ecks

Ecks der Sinus von 18° (§. 2 *Trig.*). Derowegen könnet ihr aus dem gegebenen Radio des Circuls diese beyden Sinus finden (§. 11 *Trig.*).

Die 66. Aufgabe.

174. **Eine gerade Linie AC dergestalt in F zuschneiden, daß die gantze Linie AC sich zu dem grössern Theile CF verhält, wie der grössere Theil CF zu dem kleinern FA, oder daß $CF^2 = AC$ in FA.** Tab. I. Fig. 6.

Auflösung.

Es sey $AC = a$, $CF = x$, so ist $FA = a - x$ und also

$$x^2 = aa - ax$$

$$x^2 + ax = a^2$$

$$\tfrac{1}{4}a^2 \quad \tfrac{1}{4}a^2 \; (\S.\ 83)$$

$$x^2 + ax + \tfrac{1}{4}a^2 = \tfrac{5}{4}a^2$$

$$x + \tfrac{1}{2}a = \sqrt{\tfrac{5}{4}a^2}$$

$$x = \sqrt{\tfrac{5}{4}a^2} - \tfrac{1}{2}a.$$

Setzet $AC = DC = a$ rechtwincklicht zusammen, und machet $CE = \tfrac{1}{2}a$, so ist $DE = \sqrt{\tfrac{5}{4}a^2}$ (§. 172 *Geom.*). Machet ferner $EF = DE$, so ist die Linie AC in F auf verlangte Art getheilet. Tab. I. Fig. 6.

Anmerckung.

175. Die alten Geometrae nennen dieses lineam media & extrema ratione secare. Man pflegt es auch divinam sectionem zunennen, weil (wie aus dem *Euclide* zusehen ist) man viel aus dieser Linien-Theilung demonstrirt hat.

Zusatz.

176. Wenn *a* der Radius eines Circuls ist, so ist der grössere Theil von der Linie *x* die Seite des Zehen-Ecks (§. 169).

Die 67. Aufgabe.

Tab. I. Fig. 7

177. **Aus der gegebenen Hypothenuse eines rechtwincklichten Drey-Ecks AB und seinem Inhalte, das Drey-Eck ABD zuzeichnen.**

Auflösung.

Es sey AB$=a$, der Perpendicul DC$=y$, der Inhalt$=bb$, so ist der Inhalt $=\frac{1}{2}ay$, (§. 156 *Geom.*)

und demnach $\frac{1}{2}ay=bb$

$$y=\frac{2bb}{a}$$

Beschreibet über AB$=a$ einen halben Circul: richtet in A auf dem Diameter AE$=2b$ perpendicular auf, und ziehet die Linie EB. Machet AG$=\frac{1}{2}$AE$-b$, und ziehet FG mit EB parallel; so ist AF$=2bb:a$ (§. 87 *Geom.*). Wenn demnach FD mit dem Diameter AB parallel gezogen wird; so giebt sich der verlangte Triangel ADB.

Die 68. Aufgabe.

Tab. I. Fig. 8.

178. **Aus dem gegebenen Umfange AB + BC + CA eines rechtwincklichten Triangels und seinem Inhalte, die größte Seite BC zufinden.**

Auf-

Auflösung.

Es sey $AB+BC+CA=a$, $BC=x$,
der Inhalt $=bb$, so ist $AC+BA=a-x$,

$$(AC+BA)^2=a^2-2ax+x^2$$
$$AC^2+BA^2=x^2 \quad (\text{§. } 172 \text{ Geom.})$$
$$2BA.AC=a^2-2ax \quad (\text{§. } 93 \text{ Arithm})$$

Daher (§. 156 *Geom.*)

$$a^2-2ax=4bb$$
$$a^2-4bb=2ax$$
$$\tfrac{1}{2}a-\frac{2bb}{a}=x.$$

Suchet zu $AB=a$, $BC=2b$, und $BD=b$ die vierte proportional Linie $BE=2bb:a$ (§. 187 *Geom.*). Beschreibet mit $BF=\tfrac{1}{2}a$ den Bogen FG; so ist $EG=x$, und ihr könnet den verlangten Triangel nach der vorhergehenden Aufgabe beschreiben. Tab. I. Fig. 9.

Anmerckung.

179. Weil alle Flächen durch das Quadrat ausgemessen werden (§. 147 *Geom.*); so giebt man in geometrischen Aufgaben jederzeit die Fläche durch eine Linie deren Quadrat ihr gleich ist.

Die 69. Aufgabe.

180. **Aus der gegebenen Grund-Linie BC und den beyden Winckeln an derselben B und C, die Höhe AD zufinden.** Tab. I. Fig. 10.

Auflösung.

Es sey BC$=a$, AD$=x$. Weil bey D rechte Winckel sind, so wisset ihr auch die Winckel BAD und DAC (§. 102 *Geom.*). Es sey der Sinus des Winckels ABD$=t$, der Sinus des Winckels BAD$=r$, der Sinus des Winckels DAC$=q$, der Sinus des Winckels ACD$=p$; so ist $t:r=x:$BD, und $p:q=x:$DC (§. 43 *Trig.*), folglich BD$=rx:t$; und DC$=qx:p$. Derowegen, weil BD+DC$=$BC, so habt ihr

$$rt:t+qx:p=a$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad} \; pt$$
$$prx+tqx=apt$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad} \; pr+tq$$
$$x=apt:(pr+tq).$$

Anders.

Wenn ihr AD als den Sinum totum ansehet, so ist BD der Tangens des Winckels BAD, und DC der Tangens des Winckels DAC (§. 6 *Trigon.*). Es sey der Sinus Totus $=t$, die Tangentes seyn m und n, so ist $t:m=x:$BD, und $t:n=x:$DC: folglich ist BD$=mx:t$, und DC$=nx:t$, und demnach

$$a=(nx+mx):t$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad}$$
$$at=nx+mx$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad} \; n-m$$
$$at:(n+m)=x.$$

Suchet also zu der Summe der Tangentium der

der beyden Winckel BAD und DAC, dem Sinu toto und der Grund-Linie BC die vierte proportional-Zahl (§ 113 *Arithm.*); so kommt die Höhe des Triangels AD heraus.

Die 70. Aufgabe.

181. **Aus drey gegebenen Seiten eines Triangels AB, AC und CB die Höhe AD zufinden.** Tab. I. Fig. 10.

Auflösung.

Es sey $AB = a$, $BD = x$,
$BC = b$, so ist $DC = b - x$.
$AC = c$,

Weil nun $AB^2 - BD^2 = AD^2$, und $AC^2 - DC^2 = AD^2$ (§. 171 *Geom.*), so ist auch $AB^2 - BD^2 = AC^2 - DC^2$, folglich

$$a^2 - x^2 = c^2 - b^2 + 2bx - x^2$$

$$a^2 + b^2 - c^2 = 2bx$$

$$\frac{a^2 - c^2}{2b} + \tfrac{1}{2}b = x.$$

Folglich $(a^2 - c^2) : 2b = (a + c)(a - c) : 2b$ der halbe Unterscheid der Theile CD und BD (§. 61).

Lehrsatz.

Wenn in einem Triangel ACB aus dem Scheitel-Puncte A auf die Grund-Linie CB ein Perpendicul AD gefället wird; so verhält sich die Grund-Linie BC zu den beyden Schenckeln AB und AC zusammen genommen, wie der Unterscheid derselben zu

zu dem Unterscheide der Theile von der Grund-Linie BD und CD.

Wenn ihr BD habt, so könnet ihr (§. 172 *Geom.*) AD finden.

Es sey sey $a=6$, $b=4$, $c=3$, so ist $x=(36-9):8+2=27:8+2=5+\frac{3}{8}$ oder $=(9.3):8+2=27:8+2=3\frac{3}{8}+2=5\frac{3}{8}$.

$AB^2=2304:64$
$BD^2=1849:64$

$AD^2=455:64$ (§. 172 *Geom.*)

```
4|55|00|00  ⎧
4|  |  |    ⎨ 21 33/100 demnach ist
            ⎩
-----------
 |55|  |      AD=2133:800.
 |41|  |
-----------
 |14|00|
 | 4|23|
-----------
 |12|69|
-----------
 |  1|31|00
 |   |42|63
-----------
 |  1|27|89
-----------
 |   | 3|11  u. s. w.
```

An-

Anmerckung.

182. Auf eine gleiche Weise könnet ihr aus drey gegebenen Seiten die Höhe des Triangels finden, wenn er stumpfwincklicht ist.

Zusatz.

183. Derowegen könnet ihr auch aus drey gegebenen Seiten den Inhalt eines Triangels finden, (§. 156 *Geom.*).

Die 71. Aufgabe.

184. **Aus dem gegebenen Inhalte eines rechtwincklichten Triangels ABC, dessen drey Seiten AC, BA, AC in einer geometrischen Progression sind, die Seiten selbst zufinden.** Tab. I. Fig. 8.

Auflösung.

Es sey der Inhalt $= a^2$, $AB = y$,
$CA = x$,
so ist $BC = \frac{x^2}{y}$ (§. 113 *Arith.*),

und demnach

$x^4 : y^2 = x^2 + y^2$ (§. 172 *Ge.*) $xy = 2a^2$ (§. 156 *Geom.*)

y^4 | y

$x^4 = x^2y^2 + y^4$ | $x = 2a^2 : y$

$x^4 - x^2y^2 = y^4$, | $x^2 = 4a^4 : y^2$

$x^4 = 16a^8 : y^4$

ingleichen $y = 2a^2 : x$

$y^2 = 4a^4 : x^2$

$y^4 = 16a^8 : x^4$.

Hier-

Hieraus nun wird gefunden

$$\frac{16a^2}{y^4} - 4a^4 = y^4 \qquad x^4 - 4a^4 = \frac{16a^8}{x^4}$$

$$16a^8 - 4a^4y^4 = y^8 \qquad x^8 - 4a^4x^4 = 16a^8$$

$$16a^8 = y^8 + 4a^4y^4 \qquad \phantom{x^8 - {}} 4a^8 \quad\quad 4a^8$$

$$4a^8 \quad\quad 4a^8 \qquad x^8 - 4a^4x^4 + 4a^8 = 20a^8$$

$$20a^8 = y^8 + 4a^4y^4 + 4a^8 \qquad x^4 - 2a^4 = 2a^4\sqrt{5}$$

$$2a^4\sqrt{5} = y^4 + 2a^4 \qquad x^4 = a^4(2 + 2\sqrt{5})$$

$$a^4(2\sqrt{5} - 2) = y^4$$

$$a\sqrt[4]{(2\sqrt{5} - 2)} = y \qquad x = a\sqrt[4]{(2 + 2\sqrt{5})}.$$

Tab. I. Fig. 11. Richtet auf $AB = a$ eine perpendicular-Linie $CA = 2a$ auf; so ist $BC = \sqrt{5aa}$. Machet $DB = AB = a$; so ist $DC = \sqrt{5aa} - a$. Traget DC aus C in E, und aus E in K die Linie $CA = 2a$, und beschreibet sowohl über AE als AK einen halben Circul. Ziehet durch C mit AB die Linie FL parallel; so ist $FC = \sqrt{(2a\sqrt{5aa} - 2aa)}$, und $CL = \sqrt{(2aa + 2a\sqrt{5aa})}$, oder $FC = (\sqrt{2a^2\sqrt{5} - 2a^2}) = a\sqrt{(2\sqrt{5} - 2)}$ und $CL = a\sqrt{(2 + 2\sqrt{5})}$. Theilet CA in zween gleiche Theile in H, daß $CH = a$, und machet $CG = CF$, und $CM = CL$. Beschreibet sowohl über HG, als HM einen halben Circul; so ist $CI = \sqrt{(aa\sqrt{(2\sqrt{5} - 2)})} = a\sqrt[4]{(2\sqrt{5} - 2)} = y$, und $CN = \sqrt{(a^2\sqrt{(2 + 2\sqrt{5})})} = a\sqrt[4]{(2 + 2\sqrt{5})} = x$. Derowegen, wenn

wenn ihr CO=CN machet, und die Linie IO ziehet; so ist ICO der verlangte Triangel.

Die 72. Aufgabe.

185. **Aus der gegebenen Summe der Seiten AC+AB in einem rechtwincklichten Triangel CAB und dem Perpendicul AD, die Seiten zufinden.** Tab. I. Fig. 8.

Auflösung.

Es sey $AB+AC=a$, $CA-BA=y$, $BC=x$, $AD=b$; so ist $AC=\frac{1}{2}(a+y)$, $AB=\frac{1}{2}(a-y)$ (§. *61, 172, 183 Geom.*).

Folglich:

$$x^2=\frac{1}{2}(aa+yy)$$
$$2x^2=aa+yy$$
$$2x^2-a^2=y^2,$$

$$BA:DA=BC:AC$$
$$\frac{1}{2}(a-y):b=x:\frac{1}{2}(a+y)$$
$$\frac{1}{4}(aa-yy)=bx$$
$$aa-4bx=yy.$$

Derowegen
$$2x^2-aa=aa-4bx$$
$$x^2+2bx=aa$$
$$x^2+2bx+bb=aa+bb \text{ (§. 83.).}$$
$$x=\sqrt{(aa+bb)}-b.$$

Auf der gegebenen Linie $CD=a$ beschreibet ein Rectangulum CDFG, dessen Höhe DF der Höhe des Triangels b gleich ist: so ist Tab. I. Fig. 12.

CF

$CF=\sqrt{(a^2+b^2)}$. Machet FE=FD, und CB =CE: so ist $CB=\sqrt{(a^2+b^2)}-b$. Beschreibet demnach über CB einen halben Circul, und ziehet die Linien AB und AC; so ist CAB der verlangte Triangel.

Die 73. Aufgabe.

Tab. II. Fig. 13.

186. **Aus dem gegebenen Sinu eines Winckels, den Sinum des doppelten, dreyfachen, vierfachen rc. Winckels zufinden.**

Auflösung.

Es sey der einfache Winckel LAM. Nehmet AB für den Sinum Totum an, und machet AB=BC=DC=DE=EK, so ist BF der Sinus des Winckels A (§ *3 Trigon.*), und AF =FC (§. *107 Geom*) der Cosinus (§. *7 Trig.*). Ferner DBC=2BAC (§. *101, 107 Geom.*), D CE=CDA+CAD (§. *cit.*) =3CAD, KDE =DEA+KAE (§. *cit.*) =4KAE u. s. w. Weil nemlich CDA=CBD (§. *107 Geom.*) =2BAC, wie erwiesen worden ist, und DEA=DCE (§. *107 Geom.*)=3KAE, wie gleichfalls erwiesen worden ist. Folglich ist GC der Sinus des doppelten, DH des dreyfachen, EI des vierfachen Winckels A (§. *3 Trigon.*); hingegen BG der Cosinus des doppelten, CH des dreyfachen, DC des vierfachen Winckels (§. *7 Trigon.*).

Es

Es sey $AB = r$, $BF = b$, $AF = c$,
so ist $AB : BF = AC : GC$ (§. *183 Geom.*)

$$r \quad b \quad 2c \quad 2bc : r$$

$$AB : AF = AC : AG \text{ (§. cit.)}$$

$$r \quad c \quad 2c \quad 2cc : r.$$

Derowegen ist $BG = GD = 2cc : r - r = (2cc - rr) : r =$ (weil $r^2 = b^2 + c^2$) $(2cc - b^2 - c^2) : r = (c^2 - b^2) : r$, folglich $AD = AG + GD = (3c^2 - b^2) : r$.

Es ist ferner (§. *184 Geom.*)

$$AB : BF = AD : DH$$

$$r : b = \frac{3c^2 - b^2}{r} : \frac{3bc^2 - b^3}{r^2}$$

$$AB : AF = AD : AH$$

$$r : c = \frac{3c^2 - b^2}{r} : \frac{3c^3 - b^2c}{r^2}.$$

Derowegen ist $CH = HE = AH - AC = (3c^3 - b^2c) : r^2 - 2c = (3c^3 - b^2c - 2cr^2) : r^2 =$ (weil $r^2 = c^2 + b^2$) $(3c^3 - b^2c - 2c^3 - 2b^2c) : r^2 = (c^3 - 3b^2c) : r^2$, folglich $AE = EH + HA (3c^3 - b^2c + c^3 - 3b^2c) : r^2 = (4c^3 - 4b^2c) : r^2$.

Es ist weiter (§. *183 Geom.*)

$$AB : BF = AE : EI$$

$$r : b = \frac{4c^3 - 4b^2c}{r^2} : \frac{4bc^3 - 4b^3c^3}{r^3},$$

$$AB \; AF = AE : AI$$

$$r : c = \frac{4c^3 - 4b^2c}{r^2} : \frac{4c^4 - 4b^2c^2}{r^3}.$$

Derowegen ist $DI = AI - AD = (4c^4 - 4b^2c^2) : r^3 - (3c^2 + b^2) : r = (4c^4 - 4b^2c^2 - 3c^2r^2 + b^2r^2) : r^3 = (4c^4 - 4b^2c^2 - 3b^2c^2 - 3c^4 + b^4 + b^2c^2) : r^3 = (c^4 - 6b^2c^2 + b^4) : r^3$, weil nemlich $r^2 = b^2 + c^2$.

Wenn demnach der Sinus totus r, der Sinus des einfachen Winckels b, und sein Cosinus c ist, so ist der Sinus

des zweyfachen $2bc ; r$
des dreyfachen $(3bc^2 - b^3) : r^2$
des vierfachen $(4bc^3 - 4b^3c) : r^3$
des fünffachen $(5bc^4 - 10b^3c^2 + b^5) : r^4$
des sechsfachen $(6bc^5 - 20b^3c^3 + 6b^5c) : r^5$

Hingegen der Sinus Complementi oder Cosinus

des zweyfachen $(cc - bb) : r$
des dreyfachen $(c^3 - 3b^2c) : r^2$
des vierfachen $(c^4 - 6b^2c^2 + b^4) : r^3$
des fünffachen $(c^5 - 10b^2c^3 + 5b^4c) : r^4$
des sechsfachen $(c^6 - 15b^2c^4 + 15b^4c^2 - b^6) : r^5$.

Wenn ihr diese Formuln gegen das Potentzen-Täflein (§. 91) haltet, so werdet ihr wahrnehmen, daß die Glieder vor die Sinus aus den geraden, vor die Cosinus aber aus den ungeraden Stellen der Potentzen genommen werden, nur, daß das Mehr- und Minder-Zeichen beständig abwechselt. Wollt ihr demnach allgemeine Formuln haben; so dürfet ihr sie nur aus der allgemeinen Formul für die Potentzen ausschreiben. Nemlich der Sinus des vielfachen Bogens ist

$\frac{mc^{m-1}b}{r^{m-1}} - \frac{m.m-1.m-2.c^{m-3}b^3}{1.\ 2.\ 3.\ r^{m-1}} + \frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.c^{m-5}b^5}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ r^{m-1}}$ &c. Hingegen sein Cosinus ist $\frac{c^m}{r^{m-1}} - \frac{m.m-1.c^{m-2}b^2}{1.\ 2.\ r^{m-1}} + \frac{m.m-1.m-2.m-3.c^{m-4}b^4}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ r^{m-1}}$ &c.

Zusatz.

187. Weil der Tangens des einfachen Winckels $t = br:c$, und also $c = br:t$ (§. *18 Trig.*) und (§. *cit.*) wenn der Tangens des zwiefachen v ist

$$\frac{c^2-b^2}{r} : \frac{2bc}{r} = r:v$$

das ist $c^2-b^2 : 2bc = r:v$

oder $\frac{b^2r^2}{t^2} - b^2 : \frac{2b^2r}{t} = r:v$

so ist $r^2-t^2 : 2tr = r:v$

und $v = \frac{2tr^2}{r^2-t^2}$.

Anmerckung.

188. Auf eben diese Art könnet ihr die Tangentes der übrigen vielfachen Winckel, ja auch eine allgemeine Formul für alle Tangentes der vielfachen Winckel finden. Ihr könnet aber auch die Tangentes suchen, ohne daß ihr nöthig habt, die Sinus zuwissen, wie in der folgenden Aufgabe gezeigt wird. Und dazu habt ihr folgenden Satz nöthig.

Tab. II. Fig. 14.

Wenn der Winckel CAB durch die Linie EA in zween gleiche Theile getheilet wird, so verhält sich die eine Seite AB zu dem ihr anliegenden Theile der Grund-Linie BE, wie die Seite AC zu dem Theile EC, welcher an ihr liegt.

Beweiß.

Verlängert BA in D, bis AD=AC, und ziehet die Linie CD. Weil der Winckel CAB=ACD+ADC (§. *101 Geom.*), und ACD =ADC (§. *107 Geom.*); so ist ACD=$\frac{1}{2}$CAB =CAE, folglich EA mit CD parallel (§. *98 Geom.*), und daher BA:BE=AD(=AC): EC (§. *184 Geom.*). W. Z. E. W.

Zusatz.

189. Derowegen verhält sich auch BA: AC=BE:EC, folglich BA+AC:AC=BC: EC (§. 142).

Tab. II. Fig. 15.

Die 74. Aufgabe.

190. **Aus dem Tangente und Secante des einfachen Winckels die Tangentes und Secantes des zweyfachen, dreyfachen, vierfachen etc. zufinden.**

Auflösung.

Nehmet AB für den Sinum totum an, so ist BC der Tangens des einfachen Winckels CAB, BD der Tangens des zweyfachen DAB u. s. w.

Es sey AB=a, BC=b, BD=x; so ist CD=$x-b$, CD^2=$x^2-2bx+b^2$, AD^2=$aa+xx$. Nun ist AB:AD=BC:CD (§. 187), und

und daher $AB^2 : AD^2 = BC^2 : CD^2$ (§. 142), das ist,

$$a^2 : a^2 + x^2 = b^2 : x^2 - 2bx + b^2$$

$$a^2b^2 + b^2x^2 = a^2x^2 - 2a^2bx + a^2b^2$$

$$2a^2bx = a^2x^2 - b^2x^2$$

$$a^2x - b^2x$$

$$2a^2b : (a^2 - b^2) = x.$$

Derowegen ist $CD = x - b = 2a^2b : (a^2 - b^2) - b = (2a^2b - a^2b + b^3) : (a^2 - b^2) = (a^2b + b^3) : (a^2 - b^2)$.

Den Secantem AD findet ihr nun also.

$BC : CD = AB : AD$ (§. 183).

$$b : \frac{a^2b + b^3}{a^2 - b^2} = a : AD$$

das ist $1 : \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} = a : AD$,

folglich $AD = (a^3 + ab^2) : (a^2 - b^2)$.

Oder wenn ihr den Secantem des einfachen Winckels $AC = \sqrt{(a^2 + b^2)} = c$ setzet, so ist $AD = ac^2 : (a^2 - b^2) = ac^2 : 2a^2 - c^2$).

Auf gleiche Art wird der Tangens des dreyfachen Winckels $BE = (3a^2b - b^3 : a^2 - 3b^2)$, und der Secans $AE = c^3 : (a^2 - 3b^2)$ gefunden, u. s. w.

Die 75. Aufgabe.

191. **Aus dem gegebenen Inhalte eines rechtwincklichten Triangels ABC und dem Winckel B, die Seiten zufinden.** Tab. I. Fig. 8.

Auflösung.

Es sey der Inhalt $=b^2$, AB $= x$
der Sinus Totus $=r$, so ist
der Tangens B $=t$, $r:t=x:AC$ (§. 6 Trig.)
daher $AC=tx:r$.

Folglich:

$$tx^2 : 2r = b^2$$

$$x^2 = (2b^2r : t)$$

$$x = \sqrt{(2b^2r : t)}.$$

Tab. II. Fig. 16. Machet in den gegebenen Winckel EDA die Seite $DA=2b$, und richtet AE perpendicular auf, so ist zugleich $AD=r$, und $AE=t$. Verlängert EA in G, und richtet in D die perpendicular-Linie DG auf; so ist $AG=2br:t$ (§. 210 Geom.). Machet AH=AG, und theilet AD in 2 gleiche Theile in I, daß $AI=b$. Werfet über HI einen halben Circul; so ist (§. 210 Geom.) $AL=\sqrt{(2b^2r:t)}$. Machet endlich AB=AL, und ziehet aus B die Linie BC mit DE parallel; so ist ABC der verlangte Triangel. Denn, weil CBA=EDA (§. 97 Geom.), so hat der bey A rechtwinckliche Triangel den verlangten Winckel: und da ferner die Seite BA durch die algebraische Rechnung gefunden worden; so ist CAB der verlangte Triangel (§. 81 Geom.).

Die 76. Aufgabe.

Tab. II. Fig. 17. 192. **Ob des Renaldini Regel in einem Circul ein jedes reguläres Viel-Eck zubeschreiben,**

schreiben, richtig sey oder nicht, zuuntersuchen.

Auflösung.

Die Regel des Renaldini ist diese: Wenn man über dem Diameter AB einen gleichseitigen Triangel aufrichtet, den Diameter AB aber in so viel gleiche Theile theilet, als die Peripherie soll getheilet werden, und aus F durch den andern Theilungs-Punct D die Linie FG ziehet; so ist BG die Seite des verlangten Viel-Ecks. Wir wollen durch das Acht-Eck zeigen, daß die Regel unrichtig ist. Denn in andern Fällen verfähret man auf gleiche Weise. Es sey demnach der halbe Diameter CB $=1$, die halbe Seite des Vier-Ecks EG $=x$, und BG sey die Seite des Acht-Ecks; so ist CD $=\frac{1}{2}$, vermöge der Regel, und FC $=\sqrt{3}$ (§. 162). Weil nun FCB und CEG rechte Winckel sind, und CDF $=$ GDE (§. 61 *Geom.*); so ist (§. 183 *Geom.*).

$$FC : CD = EG \cdot DE$$

$$\sqrt{3} : \tfrac{1}{2} = x : \frac{x}{2\sqrt{3}}.$$

Daher ist $CE = \frac{1}{2} + \frac{x}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}+x}{2\sqrt{3}}$, folglich,

weil $CE^2 + EG^2 = CG^2$ (§. 172 *Geom.*)

$$\frac{3+2x\sqrt{3}+x^2}{12}+x^2=1$$

12

 3+

$$3 + 2x\sqrt{3} + 13x^2 = 12$$

$$13x^2 + 2x\sqrt{2} = 9$$

$$\overline{\qquad\qquad} 13$$

$$x^2 + \tfrac{2}{13}x\sqrt{3} = \tfrac{9}{13}$$

$$x^2 + \tfrac{2}{13}x\sqrt{3} + \tfrac{3}{13.13} = \tfrac{9}{13} + \tfrac{3}{13.13} = \tfrac{120}{13.13}$$

$$\tfrac{1}{13}\sqrt{3} + x = \tfrac{1}{13}\sqrt{120} = \tfrac{2}{13}\sqrt{30} \text{ (§. 50.)}$$

$$x = \tfrac{2}{3}\sqrt{30} - \tfrac{1}{13}\sqrt{3}.$$

Nun ist aber $x = \frac{1}{2}\sqrt{2} = \sqrt{\frac{1}{2}}$ (§. *16 Trig.*). Derowegen erhellet, daß die Regel des *Renaldini* die halbe Seite des Vier-Ecks unrichtig heraus bringet, wie noch klärer erhellet, wenn man in zehentheiligen Brüchen so wohl aus dem Renaldinischen, als dem wahren Werthe die Wurtzel ziehet.

Die 77. Aufgabe.

193. **Einen Circul zufinden, welcher so groß ist, als die Fläche eines gegebenen Cylinders.**

Auflösung.

Es sey der Diameter des Cylinders $= a$, sein Peripherie $= p$, die Höhe $= a$; so ist die Fläche $= ap$ (§. *221 Geom.*). Es sey ferner der Diameter des Circuls $= x$, so ist $d : p = x : (px : d)$. Und demnach die Peripherie des Circuls $px : d$, folglich seine Fläche $px^2 : 4d$ (§. *168 Geom.*). Derowegen ist px^2

$$px^2 : 4d = ap$$

$$x^2 = 4ad$$

$$x = \sqrt{4ad} = 2\sqrt{ad}$$

oder $\frac{1}{2}x = \sqrt{ad}$.

Der halbe Diameter des verlangten Circuls ist die mittlere proportional-Linie zwischen der Höhe und dem Diameter des Cylinders.

Lehrsatz.

Die Fläche des Cylinders ist gleich einem Circul, dessen Radius die mittlere proportional-Linie ist zwischen der Höhe und dem Diameter des Cylinders.

Die 78. Aufgabe.

194. **Aus der gegebenen Verhältniß der Höhe eines Cylinders zu seinem Diameter und dem Diameter eines Circuls, welcher seiner Fläche gleich ist, die Höhe des Cylinders und seinen Diameter zufinden.**

Auflösung.

Es sey die gegebene Verhältniß $m:n$, der Diameter des Circuls $=d$, seine Peripherie $=p$, die Höhe des Cylinders $=x$; so ist sein Diameter $=nx:m$, und seine Peripherie $=npx:md$, folglich

$$npx^2 : md = \tfrac{1}{4}pd$$

$$x^2 = md^2 : 4n$$

$$x = \sqrt{(md^2 : 4n)}.$$

Tab. II. Fig. 18. Machet AB$=n$, und richtet darauf perpendicular auf BC$=m$. Machet ferner AD$=\frac{1}{2}d$, und richtet in D die perpendicular-Linie DE auf $=md:2n$. Machet endlich DF$=$DE, und beschreibet über AF einen halben Circul; so ist DG$=\sqrt{md^2}:\sqrt{4n}$ (§. 210 Geom.).

Die 79. Aufgabe.

195. **Aus dem gegebenen Diameter einer Kugel und der Höhe eines Cylinders, welcher ihr gleich ist, den Diameter des Cylinders zufinden.**

Auflösung.

Es sey die Höhe des Cylinders $=a$, der Diameter der Kugel $=d$, ihre Peripherie $=p$, der Diameter des Cylinders $=x$; so ist der Inhalt der Kugel $=\frac{1}{6}pd^2$ (§. 237 Geom.) Die Peripherie des Cylinders $px:d$, sein Inhalt $apx^2:4d$ (§. 221 Geom.), und demnach

$$\frac{1}{6}pd^2 = apx^2:4d$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad} \; 4d$$
$$\frac{4}{6}pd^3 = apx^2$$
$$\overline{\qquad\qquad} \; ap$$
$$2d^3 = x^2$$
$$\overline{\quad}$$
$$3a$$
$$\overline{\qquad\qquad}$$
$$\sqrt{(2d^3:3a)} = x.$$

Tab. II. Fig. 18. Es wird also der Werth von x eben wie in der vorhergehenden Aufgabe gefunden. Nemlich man macht AB$=a$, BC$=\frac{2}{3}d$, und AD$=d$; so ist DE$=$DF$=2d^2:3a$, folglich DG$=\sqrt{(2d^3:3a)}$.

Die

Die 80. Aufgabe.

196. **Aus dem gegebenen Diameter und der Höhe eines Coni, den Diameter eines Cylinders zu finden, welcher ihm, der Höhe und dem Inhalte nach, gleich ist.**

Auflösung.

Es sey der Diameter des Coni $=d$, die Höhe $=a$, der Diameter des Cylinders $=x$, die Verhältniß des Diametri zur Peripherie $=d:p$; so ist der Inhalt des Coni $=\frac{1}{12}adp$ (§. 229 *Geom.*), die Peripherie des Cylinders $px:d$, und sein Inhalt $apx^2:3d$ (§. 221 *Geom.*), folglich

$$\frac{1}{12}adp = apx^2 : 4d$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad} \; 4d$$
$$\frac{1}{3}ad^2p = apx^2$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad} \; ap$$
$$\frac{1}{3}d^2 = x^2$$
$$\overline{\qquad\qquad}$$
$$\sqrt{\tfrac{1}{3}d^2} = x.$$

Beschreibet auf dem Diameter des Kegels d einen gleichseitigen Triangel, und um denselben einen Circul; dieser ist viermal so groß als die Grundfläche des Cylinders (§. 164), folglich, wenn um den Radium dieses Circuls ein anderer beschrieben wird; so ist derselbe Radius der verlangte Diameter des Cylinders.

Die 81. Aufgabe.

197. **Aus dem gegebenen Diameter eines**

nes Coni und seiner Höhe, den Diameter einer Kugel zufinden, welche ihm gleich ist.

Auflösung.

Es sey der Diameter der Grundfläche des Coni $=d$, seine Peripherie $=p$, die Höhe $=a$, der Diameter der Kugel $=x$; so ist der Inhalt des Coni $=\frac{1}{12}adp$ (§. 229 Geom.), hingegen der Inhalt der Kugel $px^3:6d$ (§ 237 Geom.). Derowegen ist

$$\frac{1}{12}adp = px^3:6d$$

$$\frac{1}{2}ad^2 = x^3$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{2}ad^2} = x.$$

Anmerckung.

198 Bißher habe ich in leichten geometrischen Exempeln den Nutzen der Algebra gezeigt: nun aber wird es Zeit seyn, daß ich darthue, wie man in der höhern Geometrie mit sonderbahrem Vortheile, sich derselben bediene. Es handelt aber die höhere Geometrie von den krummen Linien. Derowegen soll ich zeigen, wie man durch Hülfe der Algebra die Eigenschaften der krummen Linien finden kan. Zwar dienet darzu hauptsächlich die differential- und integral Rechnung, von welcher in dem andern Theile gehandelt werden soll: allein man kan auch durch die gemeine Algebra gar viel ausrichten. Damit ihr aber verstehen möget, was hinfort beygebracht werden soll; so muß überhaupt etwas von den krummen Linien angeführet werden. Bildet euch aber nicht ein, als wenn diese Betrachtung gantz fruchtloß wäre. Vielmehr versichert euch, daß sie denenjenigen sehr zustatten

zustatten kommt, welche die Geheimnisse der Natur und Kunst genauer als andere einzusehen belieben. Ich würde jetzt vergeblich reden, wenn ich einen weitläuftigen Beweiß davon führen wolte. Hier mercket nur überhaupt, daß man gewohnt ist, die krummen Linien durch algebraische Gleichungen zuerklären, welche die Relation gewisser geraden Linien, welche man innerhalb denselben ziehen kan, gegen einander andeuten. Z. E. Es sey AMB ein halber Circul, und in demselben PM auf dem Diameter AB perpendicular. Setzet $AB = a$, $AP = x$, so ist $PB = a - x$ es sey ferner $PM = y$; so ist beständig $y^2 = ax - xx$ (*§. 210 Geom. & §. 137 Algebra.*). Derowegen drucket die Gleichung die Relation aus, welche die Linie PM zu AP in allen Puncten der Peripherie AMB hat. Und darum nennet man sie die Erklärung des Circuls. Oder es sey $AC = a$, $PC = x$, $PM = y$; so ist $a^2 - x^2 = y^2$ (*§. 172 Geom.*). Derowegen drucket diese Gleichung die Relation aus, welche PM und PC in allen Puncten der Peripherie gegen einander haben. Und also nennet man sie eine Erklärung des Circuls. Gleichwie nun aber alles, was von der Sache erkannt werden kan, aus ihrer Erklärung hergeleitet wird. (§. 2 Meth. Math.); so pflegt man aus dergleichen Gleichungen durch die Algebra die Eigenschaften der krummen Linien herzuleiten.

Tab. II. Fig. 19.

Von den krummen Linien.

Die 13. Erklärung.

199. **Die Linie AX, welche alle gerade Linien MM, welche mit einander innerhalb einer krummen Linie parallel gezogen werden, in zween gleiche Theile PM und PM theilet, wird der Diameter, und insonderheit die Axe genennet, wenn sie mit**

Tab. II. Fig. 20.

mit eben den Linien einen rechten Winckel macht

Die 14. Erklärung.

200. Die Linien MM werden die Ordinaten; ihre Helften aber PM die Semiordinaten genennet.

Die 15. Erklärung.

201. Hingegen die Abscisse PM ist das Stück des Diameters oder der Axe, welches die Ordinaten MM abschneiden.

Die 16. Erklärung.

Tab. II. Fig. 20.

202. Der Scheitel der krummen Linie ist der Punct A, worinnen sich die Axe oder auch der Diameter AX endet.

Die 17. Erklärung.

203. Eine algebraische Linie wird genennet; deren Natur durch eine algebraische Gleichung sich erklären läßt.

Die 1. Anmerckung.

204. Durch die algebraischen Gleichungen verstehen wir diejenigen, welche einerley Grad haben in allen Puncten der krummen Linie. Dergleichen ist die Gleichung des Circuls $y^2 = ax - x^2$, oder auch $a^2 - x^2 = y^2$ (§. 198.)

Die 2. Anmerckung.

205. Man nennet insgemein mit dem *des Cartes* die algebraischen Linien geometrische Linien; allein, wir sind bey der Benennung des Herrn von Leibnitz geblieben, mit welchem auch der große Engelländische Geometra *Newton* übereinstimmet, welcher (in Arithm. Vniv. p. 280.) wohl erinnert, daß nicht

nicht die Gleichung Ursache sey, warum man eine krumme Linie zur Auflösung der Fragen in die Geometrie nehmen solle, sondern es solle vielmehr darum geschehen, weil sie sich leicht beschreiben läßt.

Die 18. Erklärung.

205. **Eine transcendentische Linie wird genennet, deren Natur durch keine algebraische Gleichung sich erklären läßt.**

Anmerckung.

207. Insgemein nennet man die transcendentischen Linien mechanische Linien, abermals mit dem *des Cartes*, und wirft solchergestalt viel Linien aus der Geometrie, welche sich leicht beschreiben lassen: welches wir mit dem Herrn von Leibnitz mit Recht misbilligen, welcher eine besondere Art der Gleichungen für diese Linien erfunden hat, durch welche ihre Eigenschaften so wohl als algebraischen Linien heraus gebracht werden.

Die 19. Erklärung.

208. **Alle algebraischen Linien werden zu einem Geschlechte gerechnet, da die Glieder der Gleichungen auf gleiche Abmessungen steigen. Da nun die Gleichung für eine gerade Linie allein eine Abmessung haben kan, so nennet man eine Linie von dem ersten Geschlechte, wenn die Glieder der Gleichung zwo Abmessungen haben: sind derselben drey, so ist es eine Linie von dem andern Geschlechte: sind ihrer vier: eine Linie von dem dritten Geschlechte u. s. w.**

Anmerckung.

209. Die Gleichung für den Circul ist $y^2 = ax - x^2$, oder auch $a^2 - x^2 = y^2$. Demnach ist der Cir-

Circul eine Linie von dem ersten Geschlechte. Wiederum, wenn $ax = y^2$ die Natur einer krummen Linie erkläret; so ist dieselbe abermal eine von dem ersten Geschlechte. Hingegen, wenn die Erklärung der krummen Linie $a^2x = y^3$ ist, so ist sie eine Linie von dem andern Geschlechte.

Die 20. Erklärung.

210. **Die algebraischen Linien rechnen wir zu einer Familie, in deren Gleichungen alle Glieder bis auf die Exponenten der Dignitäten mit einander übereinkommen.**

Die 1. Anmerckung.

211. Demnach gehören die krummen Linien, deren Natur durch die Gleichungen $ax = y^2$, $a^2x = y^3$, $a^3x = y^4$ erkläret wird, zu einer Familie.

Zusatz.

212. Die krummen Linien können alle unter eine Gleichung gebracht werden, welche zu einer Familie gehören, wenn man nemlich für die determinirten Exponenten undeterminirte setzet.

Die 2. Anmerckung.

213. Solchergestalt sind alle krummen Linien, welche sich durch $ax = y^2$, $a^2x = y^3$, $a^3x = y^4$ u. s. w. erklären lassen, unter dieser Gleichung enthalten, $a^{m-1}x = y^m$ oder, wenn $a = 1$ angenommen wird, $x = y^m$.

Die 3. Anmerckung.

214. Solchergestalt könnet ihr alle algebraischen Linien für eine große Familie rechnen, welche aus unendlich kleinern bestehet, deren jede unendliche Geschlechter hat. Denn, weil in allen Gleichungen, wodurch

durch die Natur der krummen Linien erkläret wird, entweder eine gewisse Dignität der Absciſſe und Ordinate bloß durch bekannte Grössen, oder zugleich verschiedene Dignitäten derselben in einander, oder auch für einige Glieder lauter bekannte Grössen in einander multipliciret werden, alle Gleichungen aber sich auf o solviren, wenn man alle Glieder auf eine Seite setzt; (als an statt $ax = y^2$ könnet ihr sagen $y^2 - ax = o$) so wird eine General-Gleichung für alle algebraischen Linien seyn $ay^m + bx^n + cy^r x^t + df = o$. Man setzt überall das Zeichen $+$, weil die Zeichen auf gar viele Arten verändert werden können.

Die 4. Anmerckung.

215. Diese Eintheilung der Linien in ihre Geschlechter und Familien hat ihren Nutzen, und dienet die letztere sonderlich dazu, daß wir dasjenige, was vielen Linien gemein ist, auf einmal erkennen. Die erstere Eintheilung ist zu dem Ende aufgebracht worden, daß man eine Wahl der Linien anstellen könte, wenn man einige zu Auflösung einer Aufgabe aussuchen soll; wovon ich an seinem Orte reden will.

Die 5. Anmerckung.

216. Unter den krummen Linien sind sonderlich diejenigen vor andern berühmt, welche aus geschickter Zerschneidung eines Kegels oder Coni entstehen, und daher von den Alten *Sectiones Conicæ* oder Kegel-Schnitte genennet worden sind. Denn, weil sie die Alten nebst dem Circul allein in die Geometrie nahmen; so haben sie auch viel von ihren Eigenschaften geschrieben, und die neuern haben noch ein mehreres dazu gefunden. Derowegen wollen auch wir ihre vornehmsten Eigenschaften durch algebraische Rechnungen untersuchen, und zu dem Ende vor ihre Erklärungen algebraische Gleichungen annehmen. Es sind aber dieser Linien drey, nemlich die *Parabola*, die *Ellipsis* und die *Hyperbola*. Mercket hier einmal für alle-

mal, daß wir beständig die Abscisse x und die halbe Ordinate y nennen wollen.

Die 21. Erklärung.

217. **Die** *PARABOLA* **ist eine krumme Linie, in welcher** $ax = y^2$, **das ist, in welcher das Quadrat der halben Ordinate dem** Rectangulo **aus der Abscisse in eine beständige Linie gleich ist, welche der Parameter genennet wird.**

Der 1. Zusatz.

219. Derowegen ist in der Parabel $a = y^2 : x$, das ist, der Parameter ist die dritte proportional-Linie zu einer jeden Abscisse und der ihr zugehörigen halben Ordinate.

Der 2. Zusatz.

218. Es ist ferner $\sqrt{ax} = y$, das ist, die halbe Ordinate ist die mittlere proportional-Linie zwischen dem Parameter und der ihr zugehörigen Abscisse.

Der 3. Zusatz.

Tab. II. Fig. 21.

220. Solchergestalt könnet ihr eine Parabel beschreiben, wenn deren Parameter gegeben wird. Traget nemlich auf die Linie AX den Parameter BA, und ziehet durch A die Linie CD auf AX perpendicular. Beschreibet nach Gefallen Circul, welche einander in B berühren, und die Linie BX in P, die Linie CD in 1. 2. 3. 4. 5. durchschneiden. Durch P ziehet Linien I. I, II. II, III. III, u. s. w. mit CD parallel, und lasset auf dieselben aus 1. 2. 3. u. s. w. perpendicular-Linien 1. I, 2. II, 3. III, u. s. w. her-

herunter fallen, oder, welches gleich viel ist, machet PI=A1, PII=A2, PIII=A3 u. s. w. so sind die Puncte I, II, III, u. s. w. in der Parabel. Denn es sey AB $=a$, AP $=x$, A3 = PIII $=y$; so ist $y^2=ax$ (§. *210 Geom.*), und also der Punct III in der Parabel (§. 217).

Der 4. Zusatz.

221. Ihr könnet auch in einer jeden Parabel einen verlangten Punct geometrisch determiniren. Z. E. Ihr woltet wissen, ob M recht in der Parabel sey. Lasset aus M in P einen Perpendicul fallen, und traget aus P in B den Parameter. Werfet über BA einen halben Circul, wenn er durch den Punct M gehet, so ist er in der Parabel (§. *210 Geom.* & §. *217 Algebr.*). Tab. III. Fig. 22.

Der 5. Zusatz.

222. Endlich ist $x=y^2:a$, das ist, die Abscisse ist die dritte proportional-Linie zu dem Parameter und der halben Ordinate. Daher, wenn AB der Parameter ist, und BAQN ein Rectangulum; wenn man ferner NM mit BP parallel ziehet, und auf AN die Linie AM perpendicular aufrichtet; so ist der Punct M in der Parabel. Denn in dem bey A rechtwincklichten Triangel NAM ist NQ : QA = QA : QM, das ist, AB : PM = PM : AP, oder $a:y=y:x$. Tab. III. Fig. 23

Der 6. Zusatz.

223. Die erklärte Parabel (welche man die Apollonische zu nennen pflegt, weil

Apollonius Pergæus unter den Alten gründlich von ihr geschrieben hat) ist eine Linie von dem ersten Geschlechte (§. 208).

Der 7. Zusatz.

224. Wenn ihr demnach $a^2x=y^3$, $a^3x=y^4$, $a^4x=y^5$ &c. setzet, so habt ihr Parabeln von dem andern, dritten, vierten ꝛc. Geschlechte. Und daher erkläret $a^{m-1}x=y^m$ eine gantze Familie unendlicher Geschlechter der Parabeln. Gleichergestalt, wenn ihr $ax^2=y^3$, $ax^3=y^4$, $ax^4=y^5$ &c. setzet; so habt ihr noch andere Arten der Parabeln von dem andern, dritten, vierten Geschlechte, welche alle unter der Gleichung $ax^{m-1}=y^m$ begriffen sind. Beyde Familien gehören unter diese Gleichung, nebst unendlich vielen andern Linien $a^nx^m=y^{n+m}$.

Der 8. Zusatz.

Tab. III. Fig. 23.

225. Wenn ihr auf die Sehne AM der Parabel von dem ersten Geschlechte einen Perpendicul AR aufrichtet, welcher die Semiordinate PM, wenn sie verlängert wird, in R durchschneidet; so ist der Punct R in der Parabel von dem andern Geschlechte. Denn, wegen des rechten Winckels bey A ist PM : AP = AP : PR (§. 210 *Geom.*), und daher $PM^2 : AP^2 = AP^2 : PR^2$, oder $PM^2 : SR^2 = SR^2 : AS^2$ (§. 142). Wenn ihr demnach $AB=a$, $AP=SR=y$, und $PR=SA=x$ setzet; so habt ihr $ay : y^2 = y^2 : x^2$, folglich $y^3=ax^2$.

Die

Die 1. Anmerckung.

226. Auf gleiche Weise wird vermittelst der Parabel von dem andern Geschlechte, die von dem dritten und so weiter unendlich fort, gefunden, wie ich in den Actis Eruditorum des 1717ten Jahres gezeigt habe.

Der 9. Zusatz.

227. Wenn ihr AS dem Parameter gleich machet, und RS in S perpendicular aufrichtet, dann aus S in R die halbe Ordinate QM traget, und endlich aus A durch R die Linie AN ziehet; so ist N ein Punct in der Parabel von dem andern Geschlechte, in welcher $y^3 = a^2 x$. Denn es sey $AQ = y$, $AS = a$; so ist $QM = SR = y^2 : a$, folglich, da $AS : SR = AQ : QN$, das ist, $a : \frac{y^2}{a} = y : x$; so findet ihr $a^2 x = y^3$, oder $a^2 . QN = AQ^3$.

Tab. III. Fig. 24.

Die 2. Anmerckung.

228. Auf gleiche Weise wird, vermittelst der Parabel von dem andern Geschlechte, die von dem dritten und so weiter unendlich fort, gefunden, wie ich gleichfalls in den Actis Eruditorum A. 1717. gezeigt habe.

Die 22. Erklärung.

229. **Der brenn-Punct (Focus) ist der Punct in der Axe, wo der Parameter die Ordinate abgiebt.**

Die 82. Aufgabe.

230. **Die Weite des brenn-Puncts F von der Scheitel A zufinden.**

Tab. III. Fig. 25.

Auflösung.

Es sey $AF = x$, der Parameter $= a$, so ist $FR = \frac{1}{2}a$ (§. 229), folglich

$$\frac{\frac{1}{4}a^2 = ax}{\frac{1}{4}a = x.}$$

Tab. III. Fig. 25. **In der Parabel ist die Weite des brenn-Puncts F von der Scheitel A dem vierten Theile des Parameters gleich.**

Die 83. Aufgabe.

231. **Die Verhältniß zufinden, welche die Ordinaten gegen einander haben.**

Auflösung.

Tab. III. Fig. 22. Es sey der Parameter $= a$, AP $= x$, Ap$= v$, PM $= y$, pm$= z$, so ist $y^2 = ax$, und $z^2 = av$ (§. 217), folglich $y^2 : z^2 = ax : av = x : v$ (§. 144). Demnach ist $PM^2 : pm^2 = AP : Ap$, das ist:

In der Parabel verhalten sich die Quadrate der Ordinaten, wie die Abscissen.

Die 84. Aufgabe.

232. **Die Grösse des Rectanguli aus der Summe zwoer halben Ordinaten PM + pm in ihre Differenz Rm, zufinden.**

Auflösung.

$$\left.\begin{array}{r} pm + PM = \sqrt{av} + \sqrt{ax} \\ mR = \sqrt{av} - \sqrt{ax} \end{array}\right\} \text{§. } 219$$

$$(pm + PM)mR = av - ax = a(v - x).$$

Das

Das Rectangulum aus der Summe zwoer halben Ordinaten in ihre Differentz ist gleich dem Rectangulo aus dem Parameter in die Differentz der zugehörigen Abscissen.

Zusatz.

233. Derowegen verhält sich der Parameter zu der Summe zwoer halben Ordinaten, wie ihre Differentz zu der Differentz der Abscissen.

Die 85. Aufgabe.

234. **Die Verhältniß der Sehnen AM und Am zufinden, welche aus der Scheitel der Parabel A gegen das Ende der Ordinaten gezogen werden.** Tab. III. Fig. 22.

Auflösung.

Weil $PM^2 = ax$, $AP^2 = x^2$; so ist $AM^2 = ax + x^2$ (§. 172 Geom.). Wiederum, wenn ihr $AP = v$ setzet; so ist $AM^2 = av + v^2$. Derowegen ist

$$AM^2 : Am^2 = ax + x^2 : av + v^2$$
$$= (a + x)x : (a + v)v.$$

Die Quadrate der Sehnen AM und Am verhalten sich in der Parabel, wie die Rectangula aus den Abscissen in die Aggregate der Abscissen und des Parameters.

Die 86. Aufgabe.

235. **Die Grösse der Linie FM zufinden,** Tab. III. Fig. 25.

 den,

den, welche aus dem brenn=Puncte an das Ende einer Ordinate M gezogen wird.

Auflösung.

Es sey der Parameter $= a$, AP $= x$, so ist AF $= \frac{1}{4}a$ (§. 230), PF $= x - \frac{1}{4}a$, folglich

$$PF^2 = x^2 - \frac{1}{2}ax + \frac{1}{16}a^2$$
$$PM^2 = ax \quad (\S. 217)$$

$$FM^2 = x^2 + \frac{1}{2}ax + \frac{1}{16}a^2 \quad (\S. 172 \text{ Geom.}).$$

$$FM = x + \frac{1}{4}a.$$

Die gerade Linie FM, welche aus dem brenn=Puncte F einer Parabel, gegen das Ende ihrer Ordinate M gezogen wird, ist gleich der Summe aus der Abscisse und der Weite des brenn=Puncts von der Scheitel.

Der 1. Zusatz.

Tab. III. Fig. 25.

236. Wenn ihr den vierten Theil des Parameters aus A in F und in f traget, durch AX so viel parallel=Linien MM ziehet, als euch gefällt, und aus F mit der Weite Pf die Puncte M beyderseits abschneidet; so könnet ihr abermal eine Parabel beschreiben.

Der 2. Zusatz.

Tab. III. Fig. 26.

237. Ihr könnet auch dieses durch die Bewegung verrichten. Denn, nehmet, wie vorhin, auf der Axe Af $=$ AF $= \frac{1}{4}a$. Befestiget in f ein Lineal DC dergestalt, daß es in f mit fX einen

einen rechten Winckel macht. Nehmet ein Winckel-Maaß IGH, und befestiget an seinen einem Ende H einen Faden, welcher ihm gleich ist; das andere Ende aber des Fadens bindet an einen Nagel, welchen ihr in dem brenn-Puncte F eingeschlagen habt. Wenn ihr einen Stift an das Winckel-Maaß IGH haltet, und es an dem Lineale DC verschiebet; so wird sich die Parabel beschreiben. Denn, es ist beständig FM = AP + Af = $x + \frac{1}{4}a$, und daher M ein Punct in der Parabel (§. 235).

Anmerckung.

238. Auf ebenmäßige Art könnet ihr die Eigenschaften der Parabeln von höheren Geschlechtern untersuchen. Wollet ihr aber diejenigen haben, welche allen Parabeln gemein sind, so dürfet ihr nur die allgemeine Gleichung für ihre gantze Familie annehmen. Denn weil $a^{m-1}x = y^m$, so ist auch $a^{m-1}v = z^m$, folglich $PM^m : pm^m = AP : Ap$. Wiederum, weil $PM + pm = \sqrt[m]{a^{m-1}x} + \sqrt[m]{a^{m-1}v}$, $mR = \sqrt[m]{a^{m-1}v} - \sqrt[m]{a^{m-1}x}$; so ist $(PM + pm) . mR = \sqrt[m]{a^{2m-2}v^2} - \sqrt[m]{a^{2m-2}x^2}$. Weil $FR = \frac{1}{2}a$; so ist $a^m : 2^m = a^{m-1}x$, folglich $x = a : 2^m = AF$. Derowegen kommt in den Parabeln von dem höheren Geschlechte der brenn-Punct dem Scheitel-Puncte immer näher, wenn sie einen Parameter haben.

Tab. III. Fig. 22.

Tab. III. Fig. 25.

Die 23. Erklärung.

239. **Die *ELLIPSIS* ist eine krumme Linie, in welcher sich verhält das** Rectangulum

Tab. III. Fig. 27.

gulum aus den Theilen der Axe AP und PB, zu dem Quadrate ihrer halben Ordinate PM, wie die Axe AB zu einer unveränderlichen Linie, welche ihr Parameter genennet wird: das ist, wenn ihr $AB = a$, den Parameter $= b$, $PM = y$, und $AP = x$ sezet, in welcher $ay^2 = abx - bx^2$.

Der 1. Zusatz.

240. Derowegen ist $y^2 = bx - bx^2 : a$, das ist, das Quadrat der halben Ordinate ist gleich einem Rectangulo aus der Abscisse in den Parameter, weniger ein Rectangulum aus eben dieser Abscisse in die vierte proportional-Linie zu der Axe, dem Parameter und der Abscisse.

Der 2. Zusatz.

241. Weil $ay^2 = abx - bx^2$, so ist

$$bx^2 : (bx - y^2) = a.$$

Demnach könnet ihr in einer Ellipsi aus dem gegebenen Parameter, der Abscisse und halben Ordinate, die Axe folgendergestalt finden. Suchet zu $PE = b$, $PM = PF = y$ die dritte proportional-Linie $PG = y^2 : b$. Machet $AP = x$, und $PH = PG$; so ist $AH = x - y^2 : b = (bx - y^2) : b$. Machet ferner $AI = AH$, und $AL = AP = x$, und ziehet LB mit IP parallel; so ist $AB = a$, oder die verlangte Axe.

Tab. III. Fig. 28.

Der

Der 3. Zusatz.

242. Wiederum, weil $ayy = abx - bxx$, so ist $b = ayy : (ax - x^2)$, und daher könnet ihr in einer gegebenen Ellipsi den Parameter also finden. Richtet in B die perpendicular-Linie BE auf, und ziehet aus A durch M die Linie AE, so ist BE $= ay : x$ (§. 184 *Geom.*). Machet BG = PM, und ziehet die Linie PE, und mit ihr GH parallel; so ist BH $= ay^2 : (ax - x^2) = b$ (§. *cit.*), das ist, der verlangte Parameter.

Tab. III. Fig. 29.

Der 4. Zusatz.

243. Weil $yy = (abx - bxx) : a$, so ist $y = \surd(bx - bxx : a)$. Derowegen, wenn euch die Axe und der Parameter gegeben werden, so könnet ihr für jede Abscisse ihre gehörige halbe Ordinate folgendergestalt finden. Suchet zu der Axe AB $= a$, dem Parameter BC $= b$, und der Abscisse AP $= x$ die vierte proportional-Linie PD $= bx : a$. Ziehet DE mit AB parallel; so ist CE $= b - bx : a$. Machet PF = CE, und beschreibet über AF einen halben Circul; so ist PM $= \surd(bx - bx^2 : a) = y$, das ist, die verlangte halbe Ordinate.

Tab. III. Fig. 30.

Die 87. Aufgabe.

244. **Die Weite des Brenn-Puncts AF von der Scheitel A zufinden.**

Auflösung.

Tab. III. Fig. 27.

Es sey AB $= a$, der Parameter $= b$, AF $= x$, so ist FR $= \frac{1}{2}b$ (§. 229), und

$$\frac{1}{4}ab^2 = abx - bxx \text{ (§. 239).}$$

$$x^2 - ax = -\frac{1}{4}ab$$

$$x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}ab$$

$$\frac{1}{2}a - x = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}ab)}$$

$$\frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}ab)} = x.$$

Traget aus B in E $\frac{1}{2}b$; so ist CE $= \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$. Beschreibet über AE einen halben Circul, welcher die in dem Mittel=Puncte C aufgerichtete perpendicular=Linie CD in G durchschneidet; so ist GC $= \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}ab)}$. Machet CF $=$ GC; so ist in F der brenn=Punct.

Zusatz.

245. Also ist die Weite des brenn=Puncts von dem Mittel=Puncte C $= \sqrt{(\frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}ab)}$, das ist, die mittlere proportional=Linie zwischen $\frac{1}{2}a$ und $\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$.

Die 24. Erklärung.

Tab. III. Fig. 27.

246. **Die perpendicular=Linie DC, welche die grössere Axe AB in zween gleiche Theile theilet, ist die halbe kleine Axe.**

Die

Die 88. Aufgabe.

247. Aus dem gegebenen Parameter und der großen Axe AB, die halbe kleine Axe CD zufinden. Tab. III. Fig. 27.

Auflösung.

Es sey der Parameter $= b$, AB $= a$, CD $= \frac{1}{2}z$, so ist

$$\frac{1}{4}a^2 : \frac{1}{4}z^2 = a : b \text{ (§. 239).}$$

$$z^2 = ab$$

$$z = \sqrt{ab}.$$

das ist:

Die kleine Axe in der Ellipsi ist die mittlere proportional-Linie zwischen der großen und dem Parameter.

Der 1. Zusatz.

248. Derowegen ist der Parameter die dritte proportional-Linie zu der großen und kleinen Axe.

Der 2. Zusatz.

249. Wenn die Weite des brenn-Puncts von der Scheitel AF $= x$ ist; so ist $ax - xx = \frac{1}{4}ab$ (§. 244). Derowegen ist das Rectangulum aus der Weite des brenn-Puncts von der Scheitel AF in ihr Complement zur großen Axe FB dem Rectangulo aus der Tab. III. Fig. 27.

großen

großen Axe in den vierten Theil des Parameters gleich.

Die 89. Aufgabe.

Tab. III. Fig. 27.

250. **Die Verhältniß zufinden, welche die halben Ordinaten PM und pm in der Ellipsi gegen einander haaen.**

Auflösung.

Es sey AB $= a$, der Parameter $= b$, AP $= x$, PM $= y$, Ap $= z$, pm $= v$, so ist

$$\left.\begin{array}{l} yy = bx - bx^2 : a \\ v^2 = bz - bz^2 : a \end{array}\right\} (\S. 240).$$

Derowegen ist $y^2 : v^2 = abx - bx^2 : abz - bz^2 = ax - x^2 : az - z^2 = (a - x)x : (a - z)z$, das ist, $PM^2 : pm^2 = PB . AP : pB . Ap$, nemlich

In der Ellipsi verhalten sich die Quadrate der halben Ordinaten, wie die Rectangula aus den Theilen der Axe.

Der 1. Zusatz.

251. Derowegen ist auch $DC^2 : PM^2 = CB^2 : AP . PB$, folglich $DC^2 : CB^2 = PM^2 : AP . PB$ (§. 142), das ist, das Quadrat der halben kleinen Axe verhält sich zu dem Quadrate der halben großen, wie das Quadrat der halben Ordinate zu dem Rectangulo aus den Theilen der Axe.

Der

Der 2. Zusatz.

252. Setzet demnach $CP=x$, so ist $AP=\frac{1}{2}a-x$, $PB=\frac{1}{2}b+x$, folglich $\frac{1}{4}ab:\frac{1}{4}a^2=y^2:\frac{1}{4}a^2-x^2$. Derowegen ist Tab. III. Fig. 27.

$$ay^2=\frac{1}{4}a^2b-bx^2$$

$$y^2=\frac{1}{4}ab-bx^2:a.$$

Der 3. Zusatz.

253. Es sey $CD=d$, $AC=r$, $PC=x$; ist $AP=r-x$, und $PB=r+x$, folglich $AP.PB=r^2-x^2=AC^2-PC^2$, und daher

$$d^2:r^2=y^2:r^2-x^2$$

$$y^2=d^2(r^2-x^2):r^2.$$

Also habt ihr noch eine andere Gleichung, welche die Natur der Ellipsis erkläret.

Die 90. Aufgabe.

254. **Die Grösse der Linie zu determiniren, welche aus dem brenn-Puncte f an das Ende D der kleinen Axe gezogen wird.** Tab. III. Fig. 27.

Auflösung.

Es sey der Parameter $=b$, $AB=a$, so ist $fC^2=\frac{1}{4}aa-\frac{1}{4}ab$ (§. 245), und $DC^2=\frac{1}{4}ab$ (§. 247), folglich $fD^2=\frac{1}{4}a^2$ (§. 172 *Geom.*). Dannenhero $fD=\frac{1}{2}a=CB$.

Zusatz.

255. Wenn euch die kleine und große Axe gege-

gegeben werden, so könnet ihr die brenn-Puncte f und F gar leicht finden. Denn, theilet die große Axe AB in zween gleiche Theile in C, und richtet aus C die halbe kleine Axe CD perpendicular auf; so könnet ihr aus D mit der halben großen Axe CB die brenn-Puncte F und f determiniren.

Tab. III. Fig. 27.

Die 91. Aufgabe.

Tab. III. Fig. 31.

256. **Die Grösse der geraden Linien FM und fM zufinden, welche aus beyden brenn-Puncten F und f an das Ende M einer Semiordinate PM gezogen werden.**

Auflösung.

Es sey alles wie vorhin, nur $FC = fC = c$; so ist $PC = \frac{1}{2}a - x$, $Pf = c + \frac{1}{2}a - x$, $PF = c - \frac{1}{2}a + x$, $PF^2 = cc - ac + 2cx + \frac{1}{4}aa - ax + xx$, $Pf^2 = cc + ac - 2cx + \frac{1}{4}aa - ax + xx$. Nun ist (§. 251)

$$BC^2 : DC^2 = AP \cdot PB : PM^2$$

das ist, $\frac{1}{4}a^2 : \frac{1}{4}a^2 - c^2 = ax - x^2 : PM^2$

$$1 : 1 - \frac{4c^2}{a^2}$$

Solchergestalt ist

$$PM^2 = ax - xx - 4ccx : a + 4ccxx : aa$$
$$PF^2 = cc - ac + 2cx + \frac{1}{4}aa - ax + xx$$

$$FM^2 = cc - ac + 2cx + \frac{1}{4}a^2 - 4c^2x : a + 4c^2x^2 : a$$

$$FM = \frac{1}{2}a - c + 2cx : a.$$

Wie-

Wiederum:

$PM^2 = ax - xx - 4ccx : a + 4ccxx : aa$

$Pf^2 = cc + ac - 2cx + \frac{1}{4}aa - ax + xx$

$fM^2 = c^2 + ac - 2cx + \frac{1}{4}a^2 - 4c^2x : a + 4c^2x^2 : a^2$

$fM = \frac{1}{2}a + c - 2cx : a$

$FM = \frac{1}{2}a - c + 2cx : a$

$fM + FM = a = AB$, nemlich:

In der Ellipsi sind die beyden Linien fM und FM, welche aus den Brenn-Puncten F und f, an einen Punct M in der Peripherie gezogen werden, zusammen genommen, der großen Axe AB gleich.

Zusatz.

257. Daher könnet ihr gar leicht aus der gegebenen großen und kleinen Axe die Ellipsin beschreiben. Denn, suchet die Brenn-Puncte F und f, und schlaget in ihnen zween Nägel ein. Bindet an die Nägel einen Faden FMf, welcher so lang ist als die grosse Axe AB. Dehnet den Faden mit einem Stifte aus, und führet den Stift an dem Faden herum, so wird die Elipsis beschrieben.

Tab. III. Fig. 31.

Anmerckung.

258. Ausser der Ellipsi des Apollonii, welche von dem ersten Geschlechte ist, könnet ihr noch unzehlich viel andere von höhern Geschlechtern erdencken, welche unter der allgemeinen Gleichung begriffen werden: $ay^{m+n} = bx^m (a-x)^n$. Es ist

wie der Parameter zu der größen Axe, also die Dignität der halben Ordinate, deren Exponent den Exponenten der Dignitäten von den Theilen der Axe zusammen gleich ist, zu dem Producte aus diesen Dignitäten. Z. E. In der Ellipsi von dem andern Geschlechte ist $b:a=y^3:x^2(a-x)$; in der Ellipsi von dem vierten Geschlechte $b:a=y^4:x^2(a-x)^2$.

Die 2. Anmerckung.

259. Wenn die grosse Axe der kleinen gleich wird, so wird aus der Ellipsi ein Circul. Denn alsdenn ist $\frac{1}{4}ab=\frac{1}{4}a^2$ (§. 247), und daher $b=a$, folglich an statt $ay^2=abx-bx^2$ bekommet ihr $ay^2=a^2x-ax^2$, das ist, $y^2=ax-xx$, welche Gleichung den Circul erkläret. Wie man nun aber Ellipses von höhern Geschlechtern hat, also gibt es auch Circul von höhern Geschlechtern, wenn ihr nemlich setzet $AP^m:PM^m=PM:PB$, das ist, $x^m:y^m=y:a-x$. Also ist die Gleichung für unendliche Circul $ax^m-x^{m+1}=y^{m+1}$. Z. E. Wenn $m=1$, so ist $ax-x^2=y^2$ für den Circul des ersten Geschlechtes; ist $m=4$, so ist $ax^4-x^5=y^5$ die Gleichung für den Circul von dem vierten Geschlechte.

Tab. II. Fig. 19.

Die 25. Erklärung.

660. **Die Hyperbel ist eine krumme Linie, in welcher $ay^2=abx+bxx$, das ist, wie eine unveränderliche Linie b, welche der Parameter heisset, zu einer andern unveränderlichen Linie a, welche die Zwerch-Axe (Axis transversus) genennet wird, so das Quadrat der Semiordinate y^2 zu dem Rectangulo aus der**

der Summe der Absciſſe und Zwerch-Axe $a+x$ in die Absciſſe x.

Zuſatz.

261. Derowegen iſt $y^2=bx+bx^2:a$, $b=ay^2:(ax+xx)$, $a=bx^2:(y^2-bx)$ u. ſ. w. wie in der Ellipſi, nur daß ihr das Zeichen + an ſtatt des Zeichens — habet.

Die 26. Erklärung.

262. Weil die Gleichung der Hyperbel mit der Gleichung für die Ellipſin übereinkommt, nur, daß ſie blos in dem einen Zeichen von ihr unterſchieden iſt; ſo nennet man auch hier die mittlere proportional-Linie zwiſchen der Zwerch-Axe und dem Parameter, die kleine Axe.

Die 27. Erklärung.

263. Wenn ihr die Axe der Hyperbel AX über ihre Scheitel A verlängert, und AB der Zwerch-Axe gleich machet, ſo heißt der Punct C, durch welchen AB in zween gleiche Theile getheilet wird, der Mittel-Punct.

Tab. IV. Fig. 32.

Die 92. Aufgabe.

264. Aus dem gegebenen Parameter und der Zwerch-Axe AB, die Weite des Brenn-Puncts F von der Scheitel A, zu finden.

Tab. IV. Fig. 32.

Auflöſung.

Es ſey der Parameter $=b$, AB$=a$; ſo iſt FR$=\frac{1}{2}b$ (§. 229) und (§. 260).

 $b:a$

$$b : a = \tfrac{1}{4}bb : ax + xx$$

$$\tfrac{1}{4}abb = abx + bxx$$

$$b$$

$$\tfrac{1}{4}ab = ax + xx$$

$$\tfrac{1}{4}aa + \tfrac{1}{4}ab = \tfrac{1}{4}aa + ax + xx$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}aa + \tfrac{1}{4}ab)} = \tfrac{1}{2}a + x$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}aa + \tfrac{1}{4}ab)} - \tfrac{1}{2}a = x.$$

Tab. IV. Fig. 32. Machet $BE = \tfrac{1}{2}b$, so ist $EC = \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}b$. Richtet in C einen Perpendicul auf, und beschreibet über EA einen halben Circul; so ist $CG = \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 + \tfrac{1}{4}ab)}$. Machet CF=CG; so ist in F der Brenn-Punct.

Der 1. Zusatz.

265. Also ist die Weite des Brenn-Punctes von dem Mittelpuncte $FC = \sqrt{(\tfrac{1}{4}aa + \tfrac{1}{4}ab)}$.

Der 2. Zusatz.

266. Weil $ax + xx = \tfrac{1}{4}ab$, und $ax + xx = AF.\ FB$; hingegen $\tfrac{1}{4}ab$ das Quadrat der halben kleinen Axe CD (§. 262); so ist $AF.\ FB = CD^2$.

Die 93. Aufgabe.

Tab. IV. Fig. 32. 267. **Die Verhältniß zufinden, welche die Semiordinaten PM und pm gegen einander haben.**

Auf-

Auflösung.

Es sey die Zwerch-Axe AB$=a$, der Parameter $=b$, AP$=x$, PM$=y$, Ap$=v$, pm $=z$, so ist $y^2:z^2=(bx+bxx:a):(bv+bv^2:a)$ $=ax+xx:av+vv=(a+x)x:(a+v)v$ das ist, PM^2:pm^2=PB. AP:pB. Ap, nemlich:

Die Quadrate der Semiordinaten verhalten sich, wie die Rectangula aus den Abscissen und der Zwerch-Axe in die Abscissen.

Die 94. Aufgabe.

268. **Die Verhältniß zufinden, welche das Quadrat der Zwerch-Axe zu dem Quadrate der kleinen Axe hat.**

Auflösung.

Das Quadrat der Zwerch-Axe ist aa, der kleinen Axe aber ab (§. 262). Also verhält sich jenes zu diesem, wie aa zu ab, das ist, wie a zu b (§. 144), oder wie die Zwerch-Axe zu dem Parameter.

Zusatz.

269. Weil $b:a=$PM^2:AP.PB, (§. 260); so ist auch das Quadrat der kleinen Axe zu dem Quadrate der Zwerch-Axe, wie das Quadrat der Semiordinate zu dem Rectangulo aus der Abscisse in die Summe aus der Abscisse und der Zwerch-Axe.

Tab. IV. Fig. 32.

Die 95. Aufgabe.

Tab. III. Fig. 33.

270. **Es seyn zwo Hyperbeln von gleicher Grösse, die also einen Parameter, eine Zwerch Axe und eine kleine Axe haben, einander entgegen gesetzet, in der Weite ihrer Zwerch-Axe AB. Ziehet aus beyder Brenn-Puncte f und F, gegen einen Punct einer Hyperbel M, zwo gerade Linien fM und FM. Ihr sollet ihre Grösse finden.**

Auflösung.

Es sey alles wie vorhin, nur $FC=fC=c$; so ist $AF=c-\frac{1}{2}a$, $Af=c+\frac{1}{2}a$, $PF=x-c+\frac{1}{2}a$, $Pf=c+\frac{1}{2}a+x$, $PF^2=xx-2cx+cc+ax-ac+\frac{1}{4}aa$, $Pf^2=cc+ac+\frac{1}{4}aa+2cx+ax+xx$. Nun ist (§. 266) $CD^2=cc-\frac{1}{4}aa$, und (§. 268, 269) $AC^2:CD^2=AP.PB:PM^2$, das ist, $\frac{1}{4}aa:cc-\frac{1}{4}aa=ax+xx:PM^2$, folglich $1:\frac{4cc}{a^2}-1=ax+x^2:PM^2$.

Demnach ist:

$PM^2=-ax-xx+4c^2x:a+4ccxx:a^2$

$PF^2=xx-2cx+cc+ax-ac+\frac{1}{4}aa$

$FM^2=cc-2cx-ac+\frac{1}{4}aa+4c^2x:a+4c^2x^2:a^2$

$FM=c-\frac{1}{2}a+2cx:a$.

Wiederum:

$PM^2=-ax-x^2+4c^2x:a+4c^2x^2:a^2$

$Pf^2=cc+ac+\frac{1}{4}aa+2cx+ax+xx$

$fM^2=cc+ac+\frac{1}{4}a^2+2cx+4c^2x:a+4c^2x^2:a^2$

fM

$fM = c + \frac{1}{2}a + 2cx : a$
$FM = c - \frac{1}{2}a + 2cx : a$

$fM - FM = a = AB.$

Zusatz.

271. Hieraus fließt folgende Manier, die Hyperbel zu beschreiben. Auf eine gerade Linie ZX traget die Zwerch-Axe AB, und aus A in F, ingleichen aus B in f, die Weite des Brenn-Puncts von der Scheitel (§. 264). Schlaget in F und f Nägel ein. Bindet an den Nagel F einen Faden FMC, und mit seinem andern Ende an das eine Ende eines Lineals fC, welches um die Zwerch-Axe AB länger als der Faden ist. Hänget das Lineal mit dem andern Ende an den Nagel in f. Drücket den Faden mit einem Stifte an das Lineal und schiebet es fort; so wird er die Hyperbel beschreiben. Tab. IV. Fig. 33.

Anders.

Traget auf eine gerade Linie die Zwerch-Axe AB, und ferner aus B in f und aus A in F die Weite des Brenn-Puncts von der Scheitel (§. 264). Ziehet aus f nach Gefallen die Linie fVII, und traget aus f in L die Länge der Zwerch-Axe BA. Beschreibet aus f, mit beliebiger Eröffnung des Circuls die Bogen 1.1, 2.2, 3.3, u.s.w. und durchschneidet sie aus F mit Tab. IV. Fig. 32.

mit LI, LII, LIII u. s. w. in 1. 2. 3. u. s. w. so sind die Puncte 1, 2, 3 rc. in der Hyperbel.

Die 28. Erklärung.

Tab. IV. Fig. 34.

272. **Wenn ihr die kleine Axe DE an die Scheitel der Hyperbel A rechtwincklicht setzet, und aus dem Mittelpuncte C durch ihre beyden Enden D und E die geraden Linien CR und Cr ziehet; so werden dieselben die Asymptoten genennet.**

Der 1. Zusatz.

273. Weil CA : AE = CP : Pr, und CA : DA (= AE) = CP : PR (§. 185 *Geom.*); so ist PR = Pr (§. 71 *Arithm.*), folglich, da PM = Pm, auch MR = mr (§. 31 *Arithm.*).

Der 2. Zusatz.

274. Wenn AI mit CR parallel gezogen wird; so ist EA : ED = AI : DC (§. 184 *Geom.*), folglich, da EA = ½ ED (§. 272), auch AI = ½ DC = ½ CE. Weil nun ferner EA : ED = EI : EC (§. 184 *Geom.*), und daher, weil EA = ½ ED, auch EI = ½ CE = CI; so ist auch AI = CI (§. 28 *Arithm.*).

Die 29. Erklärung.

275. **Das Quadrat der Linie AI oder CI wird die Potentz der Hyperbel genennet.**

Die

Die 96. Aufgabe.

276. Die Grösse der Potenz der Hyperbel zufinden.

Auflösung.

Es sey $CA = \frac{1}{2}a$, $AE = \frac{1}{2}c$; so ist $CE = \sqrt{(\frac{1}{4}a + \frac{1}{4}c^2)}$ (§. 172 Geom.), und daher $CI = \frac{1}{2}\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}c^2)}$: folglich $CI^2 = (a^2 + c^2) : 16$, nemlich, die Potenz der Hyperbel ist dem vierten Theile der Quadrate der beyden halben Axen gleich. Tab. IV. Fig. 34.

Die 97. Aufgabe.

277. Den Unterscheid zwischen den Quadraten PM und PR zufinden.

Auflösung.

Weil $CA : DA = CP : PR$ (§. 184 Geom.), und $DA = \sqrt{\frac{1}{4}ab}$ (§. 262), $CP = \frac{1}{2}a + x$, so findet ihr $PR = (\frac{1}{2}a\sqrt{\frac{1}{4}ab} + x\sqrt{\frac{1}{4}ab}) : \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1}{4}ab} + 2x\sqrt{\frac{1}{4}ab} : a$. Derowegen ist: Tab. IV. Fig. 34.

$$\begin{aligned} PR^2 &= \tfrac{1}{4}ab + bx + bxx : a \\ PM^2 &= \phantom{\tfrac{1}{4}ab +{}} bx + bxx : a \end{aligned} \quad (\S.\ 261)$$

$$PR^2 - PM^2 = {}^4ab = DA^2.$$

Zusatz.

278. Wenn ihr setzet, daß die Hyperbel mit ihrer Asymptote zusammen stoße, so fällt der Punct R auf M, und ist $PR = PM^2$,

folglich $PR^2 - PM^2 = 0$. Allein $PR^2 - PM^2 = DA^2$. Darum ist $DA^2 = 0$. Da nun dieses ungereimt ist, so kan die Asymptote mit der Hyperbel niemals zusammen kommen.

Die 98. Aufgabe.

Tab. IV. Fig. 34.

279. **Die Grösse des Rectanguli aus MR in Mr zufinden.**

Auflösung.

Es sey $PR = c$, $MP = y$, so ist $MR = c - y$, $mR = y + c$, folglich $MR . mR = c^2 - y^2 = PR^2 - PM^2$, nemlich:

Das Rectangulum aus MR in mR ist gleich der Differenz der Quadrate von PR und PM.

Zusatz.

280. Weil $PR^2 - PM^2 = DA^2$ (§. 277), so ist $mR . MR = DA^2$.

Die 99. Aufgabe.

Tab. IV. Fig. 34.

281. **Wenn QM und fm mit der einen Asymptote Cr, hingegen qm und SM mit der andern CR parallel gezogen wird, die Verhältniß der Rectangulorum aus QM in MS und qm in ms zufinden.**

Auflösung

Es sey $RM = mr = a$, $Rm = rM = b$, $MQ = v$, $mq = z$. Nun ist (§. *184 Geom.*).

RM

RM : MQ = Rm : mſ
$a : v = b : (bv . a)$
rm : mq = rM : MS
$a : z = b : (bz : a)$.
Derowegen iſt MQ. MS $= bvz : a$, und mq. mſ $= bvz : a$, folglich MQ. MS = mq. mſ. das iſt:

Die Rectangula aus MQ in MS und mq in mſ ſind einander gleich.

Die 100. Aufgabe.

282. Die Verhältniß des Rectanguli aus qm in mſ zu der Potenz der Hyperbel zufinden. Tab. IV. Fig. 34.

Aufloͤſung.

Es ſey mr $= z$, qm $= y$, AE $= c$; ſo ſind, wegen der parallel-Linien AE und Pr, die Winckel CEA und qrm, und wegen der Parallelen AI und qm, die Winckel AIE und mqr einander gleich (§. 97 *Geom.*), folglich (§. 183 *Geom.*).

mr : qm = AE : AI
$z : y = c : (cy : z)$.
Wiederum, weil mR. mr $=$ AE^2 (§. 280); ſo iſt (§. 137).

mr : AE = AE : mR
$z : c = c : (c^2 . z)$.
Endlich, wegen der parallel-Linien fm und CE,

CE, ist $o=x$, und wegen der Parallelen DE und Rm, $x=y$ (§. 97 *Geom.*), folglich $o=y$ (§. 28 *Arithm.*). Wegen der Parallelen AI und CR aber, ist IAE = CDE, und wegen der Parallelen DE und Rm, CDE = fRm (§. 28 *Arithm.*). Daher (§. 183 *Geom.*).

$$AE : IE = mR : fm$$
$$c : \frac{cy}{z} = \frac{cc}{z} : \frac{c^2y}{z^2}.$$

Solchergestalt ist fm. qm $= c^2y^2 : z^2$. Da nun auch $AI^2 = c^2y^2 : z^2$; so ist fm. qm. $= AI^2$, das ist:

Das Rectangulum **aus** fm, **oder** Cq, **in** qm **ist der Hyperbel gleich.**

Der 1. Zusatz.

Tab. IV. Fig. 34.

283. Es sey CI = AI = a, Cq = x, qm = y; so ist $xy = a^2$ die Gleichung, welche die Natur der Hyperbel zwischen ihren Asymptoten erkläret.

Der 2. Zusatz.

Tab. IV. Fig. 35.

284. Wenn demnach die Asymptoten BA und AC nebst der Potenz der Hyperbel DE^2 gegeben werden: so könnet ihr die Hyperbel beschreiben. Ziehet nemlich durch E die Linie FG mit AC, und PN mit DE parallel. Ziehet ferner aus A in N eine gerade Linie AN, und

und HM mit AC parallel; so ist der Punct M in der Hyperbel. Denn AP:PN=AD:DH (§. 184 Geom.), das ist, weil PN=DE, und PM=DH, auch (§. 275) ED=DA, AP:DE=AD:PM

$x:a=a:y$

folglich ———

$a^2=xy$.

Der 3. Zusatz.

285. Die Gleichung für unendliche Hyperbeln ist $a^{m+n}=x^m y^n$.

Anmerckung.

286. Eben so könnet ihr eine Gleichung für unendliche Hyperbeln in Ansehung der Axe finden $ay^{m+n}=ax^m(a+x)^n$, deren Beschreibung Infieri in aditu ad nova arcana Geometrica detegenda lehret pag. 36. & seq. Es ist aber zu mercken, daß nach seiner Manier die Hyperbeln von einem höhern Geschlechte niemals beschrieben werden können, man habe denn zuvor alle niedrigere beschrieben. Eine andere leichtere Manier zeige ich in den Actis Eruditorum A. 1717.

Der 4. Zusatz.

287. Wenn ihr wie vorhin AD=DE=a, AI=b, IP=x, PM=y setzet; so ist AP=$b+x$, folglich $a^2=by+xy$. Tab. IV. Fig. 35.

Die 30. Erklärung.

288. **Eine gleichseitige Hyperbel wird genennet, in welcher die beyden Axen AB und DE einander gleich sind.** Tab. IV. Fig. 34.

Der 1. Zusatz.

289. Also ist auch der Parameter der Axe AB gleich (§. 262).

Der

Der 2. Zusatz.

290. Wenn man in der Gleichung für die Hyperbel $y^2 = bx + bx^2 : a$ demnach $a = b$ setzet, so kommt die Gleichung für die gleichseitige $y^2 = bx + x^2$.

Der 3. Zusatz.

Tab. IV. Fig. 34.

291. Weil CA=AE; so ist der Winckel ACE 45°, folglich der Asymptoten-Winckel RCr ein rechter Winckel.

Anmerckung.

292. Damit nun erhelle, daß die Parabel, Ellipsis und Hyperbel aus einem Kegel sich schneiden lassen, und also die Kegelschnitte der Alten sind; so will ich folgende drey Aufgaben noch hinzusetzen.

Die 101. Aufgabe.

Tab. IV. Fig. 36.

293. ***Die Natur der krummen Linie zufinden, welche herauskommt, wenn man den Kegel ABC dergestalt schneidet, daß die Axe des Schnittes DE mit der Seite des Kegels CA parallel ist.***

Auflösung.

Es sey HI mit AB, und PM mit EN parallel, $AE = HP = v$, $SI = t$, $DP = x$, $DE = z$; so ist (§. 184 *Geom*).

$$DP : DE = PI : EB$$
$$x : z = t : (t : zx)$$

und $PM^2 = HP.PI$ (§. 198) $= tv$, $EN^2 = AE.EB = tzv : x$ (§. *cit.*), folglich:

$PM^2 : EN^2 = tv : (tzv : x)$
$= x : z$ (§. 144)
$= DP : DE.$

Solchergestalt ist DLN eine Parabel (§. 231).

Die 102. Aufgabe.

294 **Die Natur der krummen Linie zufinden, welche entstehet, wenn ein Kegel BCA dergestalt geschnitten wird, daß die Axe des Schnittes DE den Diameter der Grundfläche AB durchschneidet, wenn sie beyde verlängert werden.** Tab. IV. Fig. 37.

Auflösung.

Es sey $DE=a$, $DP=x$, $DQ=v$, $PH=t$, $QL=s$; so ist $PE=a-x$, $QE=a-v$, und weil IH mit LK parallel,

$DP : PH = DQ : QK$ (§. *184 Geom.*)
$x : t = v : (vt:x)$
$EQ : QL = EP : PI$
$a-v : s = a-x : \frac{as-sx}{a-v}.$

Demnach ist $PM^2 = HP.\ PI = (tsa - tsx) : (a-v)$, und $QN^2 = KQ.QL = vts : x$ (§. 198), folglich

$PM^2 : QN^2 = \frac{tsa-tsx}{a-v} : \frac{vts}{x}$
$= ax - x^2 : av - v^2$ (§. 144).

Solchergestalt ist die Linie DLEND eine Ellipsis (§. 250).

Die

Die 103. Aufgabe.

Tab. IV. Fig. 38.

295. **Die Natur der krummen Linie zufinden, welche entstehet, wenn ein Kegel ACB dergestalt geschnitten wird, daß die Axe des Schnittes DQ die Seite des Kegels AC schneidet, wenn beyde verlängert werden.**

Anmerckung.

Es sey ED$=a$, DP$=x$, DQ$=v$, PH$=t$, PI$=s$; so ist EP$=a+x$, EQ$=a+v$, und (§. *184 Geom.*).

$$\begin{array}{l} EP : PH = EQ : AQ \\ a+x : t = a+v : \frac{at+tv}{a+x} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} DP : PI = DQ : QB \\ x : s = v : (sv : x). \end{array}$$

Demnach ist PM²=HP. PI$=ts$, und QN² =AQ.QB$=(atsv+v^2st):(ax+x^2)$ (§. 198), folglich:

$$PM^2 : QN^2 = ts : \frac{atsv+v^2st}{ax+x^2}$$

$$= ax+x^2 : av+v^2.$$

Solchergestalt ist die Linie DLNMD eine Hyperbel (§. 267).

Die 31. Erklärung.

296. **Es sey eine gerade Linie BD, wel-**

che

che mitten in E von einer andern AC rechtwincklicht durchschnitten wird. Ziehet aus C durch DB so viel gerade Linien, als ihr wollet, und machet überall QM = EA. Die Linie, welche durch alle Puncte M gehet, ist die Muschel-Linie (CONCHOIS oder CONCHILIS) des Nicomedis. Dergleichen Linie entstehet auch unten, wenn man überall QN = EF macht.

Tab. V. Fig. 39.

Der 1. Zusatz.

297. Weil QM mit DB immer einen schieferen Winckel macht, je weiter sie von EA wegkommt; so muß die Conchois der geraden Linie DB immer näher kommen.

Der 2. Zusatz.

298. Doch, weil QM niemals zu einem Puncte werden kan, sondern vielmehr immer einerley Länge behält; so können auch die Puncte Q und M niemals zusammen stoßen, folglich kan die Conchois niemals mit der Linie DB zusammen kommen. Und also ist DB ihre Asymptote.

Die 104. Aufgabe.

299. **Eine Gleichung zufinden, welche die Natur der Muschel-Linie erkläret.**

Auflösung.

Es sey QM = AE = a, EC = b, MR = EP = x, ER = PM = y; so ist CP = $b + x$, und (§. *184 Geom.*)

PE : MQ = EC : CQ
$x : a = b : (ab : x)$.

Daher CM $= a + ab : x = (ax + ab) : x$, folglich, weil $PM^2 + PC^2 = CM^2$ (§. *172 Geom.*), $y^2 + x^2 + 2bx + b^2 = (a^2b^2 + 2a^2bx + a^2x^2) : x^2$ das ist, $x^4 + 2bx^3 + y^2x^2 + b^2x^2 = a^2b^2 + 2a^2bx + a^2x^2$, welche Gleichung die Natur der oberen Muschel-Linie MAM erkläret.

Es sey CE $= b$, QN $= a$, EG $=$ ON $= x$, GN $=$ EO $= y$, so ist GC $= b - x$, und (§. *184 Geom.*).

EG : QN = GC : CN
$x : a = b - x : (ab - ax) : x$.

Daher, weil $CN^2 = CG^2 + GN^2$ (§. *172 Geom.*), $(a^2b^2 - 2a^2bx + a^2x^2) : x^2 = b^2 - 2bx + x^2 + y^2$, das ist, $a^2b^2 - 2a^2bx + a^2x^2 = b^2x^2 - 2bx^3 + x^4 + x^2y^2$, welche Gleichung die Natur der untern Muschel-Linie NFN erkläret.

Die 32. Erklärung.

Tab. IV. Fig. 40.

300. Wenn man die Semiordinaten des Circuls PM verlängert, und auf die Sehnen AM den Perpendicul AN aufrichtet, welche sie in N durchschneiden; so kommt die krumme Linie heraus, welche *Diocles* vor diesem *CISSOIDEM* genennet hat.

Der

Der 1. Zusatz.

301. Weil PB:PM = PM:PA und PM: PA = PA:PN (§. 210 Geom.); so sind die vier Linien BP, PM, AP und PN in einer steten Proportion. Tab. IV. Fig. 40.

Der 2. Zusatz.

302. Es sey AB $= a$, PN $= y$, AP $= x$, PB $= a - x$. Da nun (§. 301, 142).

$$BP^2 : PM^2 = AP^2 : PN^2$$

so ist $a^2 - 2ax + x^2 : ax - x^2 = x^2 : y^2$

das ist $a - x : x = x^2 : y^2$

folglich $x^3 = ay^2 - xy^2$

oder $y^2 = x^3 : (a - x)$.

Der 3. Zusatz.

303. Wenn $x = a$, und also BD $= y$, so ist $a^3 = oy^2$, folglich $o : 1 = a^3 : y^2$, und demnach BD, in Ansehung AB, unendlich groß, das ist, die Asymptote von der CISSOIDE.

Die 33. Erklärung.

304. *Theilet einen Quadranten eines Circuls ABC in so viele gleiche Theile, als euch beliebt. In eben so viele Theile theilet den halben Diameter AB in I. II. III. u. s. w. Richtet aus diesen Puncten perpendicular-Linien auf, und ziehet aus dem Mittel-Puncte A in die Theilungs-Puncte des Bogens die Linien A1, A2, A3* Tab. V. Fig. 41.

u. s. w. welche die perpendicular-Linien in a. b. c. d. e. durchschneiden. Die krumme Linie, welche durch die Puncte a. b. c. &c. gehet, wird die *QUADRATRIX* des *Dinostratis* genennet.

Zusatz.

305. Derowegen ist allezeit, wie der gantze Bogen BC zu dem Bogen C4, so AB zu AIV. Es sey BC $= b$, AB $= a$, C4 $= x$, AIV $= y$, so ist $ax = by$.

Die 34. Erklärung.

Tab. V. Fig. 42.

306. Theilet eine Linie Ap in lauter gleiche Theile, und richtet aus den Theilungs Puncten A, P, p rc. perpendicular-Linien auf AN, PM, pm rc. welche in einer geometrischen Proportion abnehmen. Die krumme Linie, welche durch die Puncte N, M, m rc. gehet, wird die logarithmische genennet.

Zusatz.

307. Es sind demnach die Abscissen AP die Logarithmi der Semiordinaten PM (§. 21 *Trigon.*).

Anmerckung.

308. *Hugenius* hat zu Ende seines Discurses sur la pesanteur verschiedene Eigenschaften dieser Linie beschrieben, welche *Guido Grandus* in einem besondern Buche demonstriret, welches er unter dem Titul, Geometrica Demonstratio Theorematum Hugenianorum circa logisticam, seu logarithmicam Lineam, zu Florentz 1701 in 4 herausgegeben hat. Es können noch andere Arten der logarithmischen Linien

Tab. V. Fig. 43.

erdacht

erdacht werden. So hat man eine logarithmische Spiral-Linie erfunden, in welcher der Quadrant AB in gleiche Theile getheilet wird, und aus dem Mittel-Puncte C gegen die Theilungs-Puncte des Bogens die Radii CI. CII. CIII. &c. gezogen, von ihnen aber in geometrischer Proportion die Linien C1. C2. C3. &c. abgeschnitten werden, durch deren Ende 1. 2. 3. ꝛc. die verlangte Linie gehet.

Die 35. Erklärung.

309. **Wenn sich ein Circul auf einer Linie AC fort bewegt, bis er sich gantz überworfen hat, so beschreibt der Punct a die Linie ABC, welche *CYCLOIS* oder die Rad-Linie genennet wird.** Tab. V. Fig. 44.

Zusatz.

310. Es ist also die Linie AC der Peripherie des Circuls, und überhaupt eine jede Semiordinate PM dem Bogn Ma gleich. Denn die gerade Linie Ad ist dem Bogen Pd, und daher der übrige Bogen Pb, folglich auch der Bogen BM, der Linie dD gleich. Nun ist OD = ML (§. *22 Geom.*) = PN (§. *122 Geom.* §. *2 Trig.*). Derowegen, da NM = dO, so ist auch PN + MN = Od + OD, das ist, PM = dD. Folglich ist die Semiordinate PM dem Bogen Pb, oder ihrer Abscisse BM gleich.

Die 36. Erklärung.

311. **Wenn die Peripherie des Circuls APA in gleiche Theile getheilet wird, und man den Radium CA in eben so viele Theile theilet, nach diesem CM einem, Cm zweyen ꝛc. solchen Theilen gleich macht;** Tab. IV. Fig. 39.

so sind die Puncte M, m &c. in der Spiral-Linie des *Archimedis*. Diese Linie kan nach Gefallen unendlich verlängert werden, durch Hülfe neuer Circul, welche mit dem zweyfachen, dem dreyfachen ꝛc. Radio beschrieben werden.

Zusatz.

312. Es sey die Peripherie $= p$, AC $= r$, AP $= x$, PM $= y$; so ist CM $= r - y$, folglich $pr - py = rx$. Wenn aber CM $= y$; so ist $py = rx$, und demnach für unendliche Spiral-Linien $r^n x^m = p^n y^m$.

Anmerckung.

313. Bisher habe ich die leichtesten Regeln der Algebra von den niedrigsten Gleichungen erkläret, und bey allerhand Aufgaben angebracht. Nun will ich die übrigen vornehmen, welche man in Auflösung der höheren Gleichungen vonnöthen hat.

Von der Natur der Gleichungen.

Die 37. Erklärung.

314. Die Wurtzel ist der Werth der unbekannten Grösse in einer Gleichung. Und ist es eine wahre Wurtzel, wenn sie das Zeichen + hat. Z. E. wenn $x = + 3$; hingegen eine falsche Wurtzel, wenn sie das Zeichen — hat. Z. E. wenn $x = - 3$.

Die 105. Aufgabe.

315. Die Natur der Gleichungen und ihre vornehmsten Eigenschaften zuuntersuchen.

Auf-

Auflösung.

1. Nehmet so viele Werthe von x an, als euch beliebt, formiret daraus einfache Gleichungen, und bringet sie auf o.
2. Multipliciret die einfachen Gleichungen in einander, so werden die höheren heraus kommen, deren Betrachtung euch ihre Eigenschaften offenbaren wird.

Es sey $x=2$	$x=a$
$x=-3$	$x=-b$
$x=4$	$x=c$
so ist $x-2=o$	$x-a=o$
$x+3=o$	$x+b=o$
$x-4=o$	$x-c=o$

$$\begin{array}{l}
x-2=o\\
x+3=o\\
\hline
+3x-6\\
x^2-2x\\
\hline
x^2+x-6=o\\
x-4=o\\
\hline
-4x^2-4x+24\\
x^3+x^2-6x\\
\hline
x^3-3x^2-10x+24.
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
x-a=o\\
x+b=o\\
\hline
x^2+bx-ab=o\\
-ax\\
x-c=o\\
\hline
x^3+bx^2-abx+abc=o\\
-ax^2-bcx\\
-cx^2+acx.
\end{array}$$

Wenn ihr diese Gleichungen (welche ihr nach Belieben auf höhere Grade erhöhen könnet) betrachtet; so werdet ihr mit dem *Harriot* und *Cartesio* wahrnehmen:

1. Die bekannte Grösse des andern Gliedes sey die Summe aller Wurtzeln mit einem wiedrigen Zeichen; des dritten Gliedes die Summe der Producte aus zwo in zwo Wurtzeln; des vierten die Summe der Producte aus drey in drey Wurtzeln rc. endlich das letzte Glied das Product aus allen Wurtzeln mit einand r. Z. E. in der quadratischen Gleichung ist die bekannte Grösse des andern Gliedes + 1, die Wurtzeln sind + 2 und — 3.
2. Eine jede Gleichung habe so viele Wurtzeln, als das erste Glied Abmessungen hat, oder der Exponent der Dignität desselben Gliedes Einheiten in sich begreift. Z. E. in der quadratischen Gleichung ist der Exponent 2, die Zahl der Wurtzeln ist auch 2.
3. Und zwar seyn in jeder Gleichung so viele wahre Wurtzeln, als Abwechslungen der Zeichen sind; so viel falsche, als einerley Zeichen auf einander folgen. Z. E. in unserer quadratischen Gleichung, welche eine wahre Wurtzel + 2 und eine falsche — 3 hat, folgen auf einander + +, und wechseln ab + —. In der cubischen, welche zwo wahre Wurtzeln + 2 und + 4 und eine falsche — 3 hat, wechseln anfangs + —, darauf folgen auf einander — —, und abermals wechseln ab — +.

Die

Die 1. Anmerckung.

316. Der erste und andere Satz läßt sich gar leicht aus der Art, wie die Gleichungen entstehen demonstriren, so, daß ich es für unnöthig achte, den Beweiß hieher zusetzen. Allein den dritten, welchen *Harriot* zuerst durch vielen Versuch gefunden, hat zur Zeit noch keiner überhaupt erweisen können, daher ihn auch *Reynault* aus seiner Analyse demonstré gar weggelassen hat, weil er die Regeln der Algebra hat demonstriren wollen.

Die 2. Anmerckung.

317. Ihr dürfet euch nicht wundern, daß eine einige Gleichung so gar verschiedene Wurtzeln haben kan. Denn es ist zu wissen, daß eine einige Aufgabe öfters verschiedene Fälle haben kan, und wir in jedem Falle auf einerley Gleichung verfallen: wie wir Exempel von der quadratischen Gleichung gehabt haben, in welcher einerley Gleichung herauskommt, ob man die eine oder die andere von den gesuchten Grössen x nennet. Doch, weil unterweilen einige Fälle unmöglich werden, so muß auch die Gleichung unmögliche Wurtzeln haben. Wie viele aber in jedem Falle unmögliche Wurtzeln sind, hat zwar *Newton* in seiner Arithmetica universali p. 212. zuzeigen einiger maßen sich bemühet; doch, weil weder die Regel allgemein ist, noch auch er die Demonstration hinzu setzt, so wollen wir uns damit nicht aufhalten, zumal, da man sie auch in den Leipziger Actis A. 1708 p. 522, 523. findet.

Die 106. Aufgabe.

318. **Die Wurtzel einer gegebenen Gleichung um eine gegebene Grösse zuvermehren oder zuvermindern, unerachtet man sie noch nicht erkannt hat.**

Auflösung.

Es sey die gegebene Aequation $x^3 - 6x^2$

$+13x - 10 = 0$. Ihr sollet die Wurtzel um 3 vermehren. Setzet

$$x + 3 = y$$

so ist $x = y - 3$

$$x^2 = y^2 - 6y + 9$$

$$\begin{array}{rcl} x^3 &=& y^3 - 9y^2 + 27y - 27 \\ -6x^2 &=& -6y^2 + 36y - 54 \\ +13x &=& +13y - 39 \\ -10 &=& -10 \\ \hline && y^3 - 15y^2 + 76y - 130 = 0. \end{array}$$

Eine neue Gleichung, worinnen $y = x - 3$.

Wenn ihr in der Gleichung die Wurtzel um 3 vermindern sollet, so setzet:

$$y - 3 = x$$

so ist $y = x + 3$

$$y^2 = x^2 + 6x + 9$$

$$\begin{array}{rcl} y^3 &=& x^3 + 9x^2 + 27x + 27 \\ -15y^2 &=& -15x^2 - 90x - 135 \\ +76y &=& +76x + 228 \\ -130 &=& -130 \\ \hline && x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0. \end{array}$$

Eine neue Gleichung, worinnen $x = y - 3$.

Die 107. Aufgabe.

319. **Die Wurtzel in einer Gleichung durch eine gegebene Grösse zu multipliciren.**

Auf-

Auflösung.

Ihr sollet in der Gleichung $x^3 - px^2 + qx - r = o$ die Wurzel durch a multipliciren. Setzet:

$$ax = y$$

so ist $x = y : a$

$$x^2 = y^2 : a^2$$

$$x^3 = y^3 : a^3$$

$$-px^2 = \quad -py^2 : a^2$$

$$+qx = \quad +qy : a$$

$$-r = \quad -r$$

$$y^3 : a^3 - py^2 : a^2 + qy : a - r = o$$

$$a^3$$

$y^3 - apy^2 + a^2qy - a^3r = o$, eine neue Gleichung, in welcher $y = ax$.

Zusatz.

320. Hieraus erhellet, daß ihr nur die vorgegebene Gleichung durch eine geometrische Progression multipliciren dürfet, deren erstes Glied 1, der Exponent aber diejenige Zahl ist, durch welche die Wurzel multiplicirt werden soll. Z. E. Es soll in der Gleichung $x^4 + 4x^3 - 19x^2 - 106x - 120 = 0$ die Wurzel durch 2 multiplicirt werden: so verfahret also:

x^4

$$\begin{array}{l} x^4 + 4x^3 - 19x^2 - 106x - 120 = 0 \\ 1 \quad 2 \quad 4 \quad 8 \quad 16 \\ \hline y^4 + 8y^3 - 76y^2 - 848y - 1920 = 0 \end{array}$$

eine Gleichung, worinnen $y = 2x$.

Wiederum, es soll in der Gleichung $x^4 + qx^2 - rx - f = 0$ die Wurtzel durch c multipliciert werden. Verfahret also:

$$\begin{array}{l} x^4 \ * \ + qx^2 - rx - f = 0 \\ 1 \quad c \quad c^2 \quad c^3 \quad c^4 \\ \hline y^4 \ * \ + c^2qy^2 - c^3ry - c^4f = 0 \end{array}$$

eine neue Gleichung, worinnen $y = cx$.

Anmerckung.

321. Der Stern wird jederzeit in die Stelle der Glieder gesetzt, welche fehlen.

Die 108. Aufgabe.

322. **Die Wurtzel in einer gegebenen Gleichung durch eine gegebene Grösse zu dividiren.**

Auflösung.

Es sey die gegebene Gleichung $x^3 - px^2 + qx - r = 0$. Die Wurtzel soll durch a dividirt werden. Setzet:

$$x : a = y$$

so ist

$$\begin{aligned} x &= ay \\ x^2 &= a^2y^2 \\ \hline x^3 &= a^3y^3 \\ -px^2 &= -a^2py^2 \\ +qx &= +aqy \\ -r &= -r \end{aligned}$$

$$a^3y^3 - a^2py^2 + aqy - r = 0 \quad | \; a^3$$

$$y^3 - py^2 : a + qy : a^2 - r : a^3 = 0.$$

Eine neue Gleichung, in welcher $y = x : a$.

Zusatz.

323. Hieraus erhellet, daß ihr die vorgegebene Gleichung nur durch eine geometrische Progreßion dividiren dürfet, deren erstes Glied 1, der Exponent aber diejenige Grösse ist, wodurch die Division geschehen soll. Z. E. Die Wurzel von $x^4 + 8x^3 - 76x^2 - 848x - 1920 = 0$ soll durch 2 dividirt werden. Verfahret also:

$$\begin{array}{ccccc} x^4 + & 8x^3 - & 76x^2 - & 848x - & 1920 = 0 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ \hline y^4 + & 4y^3 - & 19y^2 - & 106y - & 120 = 0. \end{array}$$

Eine neue Gleichung, worinnen $y = \frac{1}{2}x$.

Wie-

Wiederum, es soll die Wurtzel von $x^3 - 36x - 54 = 0$ durch 3 dividirt werden. Verfahret also:

$$\begin{array}{llll} x^3 & * & -36x & -54=0 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ \hline y^3 & - & 4y & -2=0 \end{array}$$

$y^3 - 4y - 2 = 0$, eine neue Gleichung, worinnen $y = \frac{1}{3}x$.

Die 109. Aufgabe.

324. **Eine Gleichung, in welcher einige Glieder fehlen, vollständig zumachen.**

Auflösung.

Vermehret die Wurtzel um so viel, als ihr wollet, oder vermindert sie (§. 318): so ist geschehen, was man verlangte.

Z. E. Es sey $x^3 * - 23x - 70 = 0$. Setzet:

$$x + 1 = y$$

so ist $x = y - 1$

$$\begin{array}{rl} x^2 = & y^2 - 2y + 1 \\ \hline x^3 = & y^3 - 3y^2 + 3y - 1 \\ -23x = & -23y + 23 \\ -70 = & -70 \\ \hline & y^3 - 3y^2 - 20y - 48 = 0. \end{array}$$

Eine neue Gleichung, worinnen kein Glied fehlet, und $y = x + 1$.

Die

Die 110. Aufgabe.

325. **Aus einer gegebenen Gleichung das andere Glied wegzuschaffen.**

Auflösung.

Wenn das andere Glied das Zeichen + hat, so vermehret; hat es aber das Zeichen —, so vermindert die Wurtzel (§. 318) durch den Quotienten, welcher herauskommt, wenn man die bekannte Grösse des andern Gliedes durch den Exponenten des ersten dividirt.

Z. E. Ihr sollet aus der Gleichung $x^3 - 8x^2 - x + 8 = 0$ das andere Glied wegnehmen.

Setzet $x - 8:3 = y$

so ist $x = y + 8:3$

$$x^2 = y^2 + 16y:3 + 64:9$$

$$\begin{array}{rlllll} x^3 = & y^3 & +8y^2 & +192y:9 & +512:27 \\ -8x^2 = & & -8y^2 & -128y:3 & -512:9 \\ -x = & & & -y & -8:3 \\ +8 = & & & & +8 \\ \hline & y^3 & * & -67y:3 & -880:27 & = 0. \end{array}$$

Eine neue Gleichung, worinnen das andere Glied fehlet, und $y = x - 8:3$.

Zusatz.

326. Wenn ihr also aus einer quadratischen Gleichung das andere Glied wegnehmet;

met; so könnet ihr solche noch auf eine andere Art, als vorhin (§. 83) geschehen ist, auflösen. Z. E.

Es sey $x^2 - 8x + 15 = 0$. Setzet $x - 4 = y$; so ist $x = y + 4$

$$x^2 = y^2 + 8y + 16$$
$$-8x = -8y - 32$$
$$+15 = \quad +15$$
$$y^2 - 1 = 0$$
$$y = 1$$

folglich $x = 1 + 4 = 5$.

Die III. Aufgabe.

327. **Aus einer gegebenen Gleichung die Brüche wegzuschaffen.**

Auflösung.

Multipliciret die Wurtzel durch das Product aus den Nennern aller vorkommenden Brüche, oder eine Zahl, durch welche sich die Nenner dividiren lassen. So ist geschehen, was man verlangte.

Exempel.

$$y^3 \; * \; -67y:3 - 880:27 = 0$$
$$1 \quad 3 \quad 9 \quad 27$$
$$x^3 \; * \; -201x - 880 = 0.$$

Eine neue Gleichung, in welcher $x = 3y$.

x^3

$$x^3 - \tfrac{2}{3}x^2 + \tfrac{3}{4}x - 64 = 0$$
$$1 \quad 12 \quad 144 \quad 1728$$

$$y^3 - 8y^2 + 108y - 110592 = 0.$$

Eine neue Gleichung, in welcher $y = 12x$.

Die 112. Aufgabe.

328. *Aus einer gegebenen Gleichung die irrational-Grössen zuschaffen.*

Auflösung.

Unterweilen kan solches durch die Multiplication; zuweilen durch die Division geschehen. Keine Regel ist allgemein.

$$x^4 + 2ax^3\sqrt{2} + 8abx^2 - a^3x\sqrt{8} - 2a^2b^2 = 0$$
$$1 \quad \sqrt{2} \quad 2 \quad \sqrt{8} \quad 4$$

$$y^4 + 4ay^3 + 16aby^2 - 8a^3y - 8a^2b^2 = 0.$$

Eine neue Gleichung, in welcher $y = x\sqrt{2}$.

$$x^3 - ax^2\sqrt[3]{2} + abx\sqrt[3]{32} - a^2b = 0$$
$$1 \quad \sqrt[3]{4} \quad \sqrt[3]{16} \quad 4$$

$$y^3 - 2ay^2 + 8aby - 4aab = 0.$$

Eine neue Gleichung, welche gantz rational ist, und deren Wurtzel $y = x\sqrt[3]{4}$.

$$x^2 - ax^2\sqrt[3]{2} + abx\sqrt[3]{32} - a^2b = 0$$
$$1 \quad \sqrt[3]{2} \quad \sqrt[3]{4} \quad 2$$

$$y^3 - ay^2 + 2aby - \tfrac{1}{2}aab - 0.$$

Eine neue Gleichung, welche gantz rational ist, und deren Wurtzel $y = x : \sqrt[3]{2}$.

Anmerckung.

329. Alles, was bisher von den Gleichungen gelehret worden, ist zu dem Ende geschehen, damit wir sie völlig auflösen, das ist, den Wehrt der unbekannten Grösse so wohl geometrisch, als in Zahlen finden könten, welches nun im folgenden gezeigt werden soll.

Die 113. Aufgabe.

330. **Alle rational-Wurtzeln, welche in einer gegebenen Gleichung enthalten sind, zufinden.**

Auflösung.

1. Es sey die gegebene Gleichung $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$. Weil 24 das Product aus allen Wurtzeln ist (§. 315); so zerfället es in die Zahlen, durch deren Multiplication es entstehet, welche sind 1. 2. 3. 4. 6. 8. 12. 24. und machet daraus folgende einfache Gleichungen: $x - 1 = 0$, $x + 1 = 0$, $x - 2 = 0$, $x + 3 = 0$, $x - 4 = 0$, $x + 4 = 0$ rc.
2. Dividiret die gegebene Gleichung durch diese einfachen, denn durch welche sie sich dividiren läßt, die zeigen ihre rational-Wurtzeln (§. 315). Als $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$ läßt sich dividiren durch $x + 3$, derowegen ist -3 eine falsche Wurtzel von dieser Gleichung. Der Quotient, welcher heraus kommt $x^2 - 6x + 8 = 0$, läßt sich fer-

ferner dividiren durch $x - 2$, und der neue Quotient ist $x - 4$. Derowegen sind 2 und 4 zwo wahre Wurtzeln von der gegebenen Gleichung.

Anders.

Ihr dürfet auch nur die Zahlen, in welche das letzte Glied zerfället worden ist, nach einander in die Stelle vor x setzen: denn, wenn dadurch die gantze Gleichung zernichtet wird, so ist die vor x gesetzte Zahl eine von ihren rational-Wurtzeln (§. 315). Z. E. Es sey $x^2 - 6x + 8 = 0$. Das letzte Glied 8 entstehet, wenn ihr 2 durch 4 multipliciret.

Setzet, $4 = x$

$$\begin{array}{rcl} 16 & = & x^2 \\ -24 & = & -6x \\ +8 & = & +8 \\ \hline 0 & = & 0. \end{array}$$

so ist

Solchergestalt ist + 4 eine von den rational-Wurtzeln.

Die 1. Anmerckung.

331. Weil in der ersten Manier das viele Dividiren beschwehrlich fallen würde, so hat man diesen Vortheil ausgedacht. 1) Ziehet die Zahl, welche ihr versuchen wollet, von der bekannten Zahl des andern Gliedes ab, und was herauskommt, multipliciret durch eben selbige Zahl. 2) Das Product ziehet von der bekannten Zahl in dem dritten Gliede ab, und was überbleibt, multipliciret abermal durch mehr gedachte Zahl. 3) Das neue Product ziehet von dem vierten Gliede ab, u. s. w. Wenn endlich bey dem letzten Gliede nichts übrig bleibt, so ist die versuchte Zahl

eine von den rational-Wurtzeln. Z. E. Ihr suchet die rational-Wurtzeln von $x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0$. Das letzte Glied 15 läßt sich in 1. 3. 5. 15 zerfällen. Wenn ihr versuchen wollet, ob einige darunter von den Wurtzeln seyn, so geschiehet es folgendergestalt:

$$\begin{array}{lllll} x^3 & -3x^2 & -13x & +15 = 0 \\ & -1 & +2 & +15 \\ \hline & -2 & -15 & 0 \\ \hline & +2 & +15 & \end{array}$$

$$\begin{array}{lllll} x^3 & -3x^2 & -13x & +15 = 0 \\ & +3 & +18 & +15 \\ \hline & -6 & +5 & 0 \\ & +3 & +3 & \\ \hline & -18 & -15 & \end{array}$$

$$\begin{array}{lllll} x^3 & -3x^2 & -13x & +15 = 0 \\ & -5 & -10 & +15 \\ \hline & +2 & -3 & 0 \\ & -5 & -5 & \\ \hline & -10 & +15 & \end{array}$$

Also ist $x - 1 = 0$, $x + 3 = 0$, $x - 5 = 0$, das ist, 1 und 5 sind die beyden wahren Wurtzeln, 3 ist die falsche.

Die 2. Anmerckung.

332. Damit ihr aber sehet, daß dieser Vortheil aus der ersten Manier völlig genommen, und für keine besondere zu halten sey, so will ich das vorige Exempel nach der gemeinen Art rechnen.

$$x-1\left.\begin{array}{l}x^3-3x^2-13x+15=0\\x^3-x^2\end{array}\right\}x^2-2x-15$$

$$\begin{array}{r}-2x^2-13x\\-2x^2+2x\\\hline-15x+15\\-15x+15\\\hline0\end{array}$$

Die 114. Aufgabe.

333. *Die Schrancken zufinden, zwischen welchen die Grösse der Wurtzeln enthalten ist.*

Auflösung.

Es sey $x^3-qx+r=o$; so ist $x^3+r=qx$, und demnach qx grösser als r, folglich x grösser, als $r:q$. Wiederum, qx ist grösser als x^3, und daher q grösser als x^2, folglich x kleiner, als $\sqrt{q}$. Die Schrancken der Wurtzeln in dem gegenwärtigen Falle sind also $r:q$ und $\sqrt{q}$.

Es sey $x^3+qx-r=o$, so ist $x^3+qx=r$, und demnach qx kleiner als r, folglich x kleiner als $r:q$. Wiederum, r ist grösser als x^3, und daher x kleiner als $r^{1:3}$, folglich $xr^{2:3}$ grösser als x^3, und $xr^{2:3}+qx$ grösser als r, endlich x grösser als $r:(r^{2:3}+q)$. Also fällt die Grösse der Wurtzel zwischen $r:q$ und $r:(r^{2:3}+q)$. Es sey $x^3-px^2+qx-r=o$; so ist $x^3-px^2=r-qx$. Wenn nun x grösser als p, so ist auch

 r grös-

r grösser als qx, und dannenhero x kleiner als $r:q$. Hingegen, wenn p grösser als x ist, so ist qx grösser als r, und dannenhero auch x grösser als $r:q$. Derowegen fallen in beyden Fällen die Wurtzeln zwischen p und $r:q$.

Es sey $x^3 - px^2 - qx + r = o$; so ist $x^3 + r = px^2 + qx$, folglich $px^2 + qx$ grösser als r, und daher auch $x^2 + qx : p + qq : 4pp$ grösser als $r : p + qq : 4pp$, $x + q : 2p$ grösser als $\sqrt{(r : p + qq : 4pp)}$, endlich x grösser als $\sqrt{(r : p + qq : 4pp)} - q : 2p$. Wiederum $px^2 + qx$ ist grösser als x^3, dannenhero $px + q$ grösser als x^2, und q grösser als $x^2 - px$, das ist, $x^2 - px + \frac{1}{4}pp$ kleiner als $q + \frac{1}{4}pp$, $x - \frac{1}{2}p$ kleiner als $\sqrt{(q + \frac{1}{4}pp)}$, endlich x kleiner als $\frac{1}{2}p + \sqrt{(q + \frac{1}{4}pp)}$. Die Schrancken also der Wurtzeln sind $\sqrt{(r : p + qq : 4pp)} - q : 2p$ und $\frac{1}{2}p + \sqrt{(q + \frac{1}{4}pp)}$.

Es sey $x^4 - qx^2 - rx - s = o$; so ist $x^4 - qx^2 = rx + s$. Demnach ist x^2 grösser als q, weil sich qx^2 von x^4 abziehen läßt, und x grösser als $\sqrt{q}$. Daher $x\sqrt{q}$ grösser als q, und $x^3\sqrt{q}$ grösser als qx^2. Wiederum, weil $x^4 - rx = qx^2 + s$, so ist x^3 grösser als r, und x grösser als $r^{1:3}$, daher x^2 grösser als $xr^{1:3}$, x^3 grösser als $xr^{2:3}$, und $x^3r^{1:3}$ grösser als rx. Endlich, da $x^4 - s = qx^2 + rx$, so ist x^4 grösser als s, und x grösser als $s^{1:4}$, folglich x^3 grösser als $s^{3:4}$, und $x^3s^{1:4}$ grösser als s. Weil nun $x^4 = qx^2 + rx + s$, so ist x^4 kleiner als $x^3\sqrt{q} + x^3r^{1:3} + x^3s^{1:4}$, und deswegen x kleiner als $q^{1:2} + r^{1:3} + s^{1:4}$.

Die

Die Schrancken der Wurtzel in dem gegenwärtigen Falle sind also $\sqrt{q}$ oder $r^{1:3}$ und $q^{1:2} + r^{1:3} + s^{1:4}$.

Eben so wird in andern Fällen verfahren.

Anmerckung.

334. Damit ihr die vorgeschriebene Manier besser fassen möget, so will ich ein Exempel in Zahlen anführen. Z. E. Es sey $x^3 - 3x + 1 = 0$, so ist $q = 3$, und $r = 1$, folglich $r : q = 1 : 3$, und $\sqrt{q} = \sqrt{3}$. Solchergestalt sind die Schrancken dieser Gleichung $\frac{1}{3}$ und $\sqrt{3}$, das ist, die Wurtzel muß grösser als $\frac{1}{3}$ und kleiner als $\sqrt{3}$ seyn.

Zusatz.

335. Wenn ihr die Zahl wisset, welche grösser als eure Wurtzel ist, so werdet ihr nicht mit vergeblichen Zahlen (§. 330, 331) versuchen, ob sie unter die rational-Wurtzeln gehören, oder nicht.

Die 115. Aufgabe.

336. *Aus einer cubischen Gleichung die Wurtzeln zufinden.*

Auflösung.

Wenn aus den cubischen Gleichungen das andere Glied weggenommen wird, so bekommet ihr drey Fälle, nemlich

$$x^3 = + px + q$$
$$x^3 = - px + q$$
$$x^3 = + px - q.$$

Damit ihr nun die Wurtzel findet, so setzet

 x=

$$x = y + z.$$

Dann ist $x^3 = y^3 + 3y^2z + 3z^2y + z^3$
$px = py + pz$

$y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3 = py + pz + q$ im ersten

Setzet $3y^2z + 3z^2y = py + pz$ (Falle.

$$\overline{} \quad y + z$$

so ist $3yz = p$

$$z = p : 3y.$$

Ferner ist $y^3 + z^3 = q$

Das ist $y^3 + p^3 : 27y^3 = q$

$$y^6 + p^3 : 27 = qy^3$$
$$y^6 - qy^3 = -p^3 : 27$$
$$\tfrac{1}{4}qq \qquad \tfrac{1}{4}qq \text{ (§. 83).}$$

$$y^6 - qy^3 + \tfrac{1}{4}qq = \tfrac{1}{4}qq - \tfrac{1}{27}p^3$$
$$y^3 - \tfrac{1}{2}q = \surd(\tfrac{1}{4}qq - \tfrac{1}{27}p^3)$$
$$y = (\tfrac{1}{2}q + \surd(\tfrac{1}{4}qq - \tfrac{1}{27}p^3))^{1:3}$$

Nun ist:

$$z^3 = q - y^3$$

das ist $z^3 = \tfrac{1}{2}q - \surd(\tfrac{1}{4}qq - \tfrac{1}{27}p^3)$

$$z = (\tfrac{1}{2}q - \surd(\tfrac{1}{4}qq - \tfrac{1}{27}p^3))^{1:3}$$

Demnach ist $z + y = (\tfrac{1}{2}q - \surd(\tfrac{1}{4}qq - \tfrac{1}{27}p^3))^{1:3} + (\tfrac{1}{2}q + \surd(\tfrac{1}{4}qq - \tfrac{1}{27}p^3))^{1:3}$ die verlangte Wurtzel in dem ersten Falle.

Eben

Eben so findet ihr für x in dem andern Falle $(\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3)})^{1:3} + (\frac{1}{2}q - \sqrt{(\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3)})^{1:3}$.

Und in dem dritten Falle $(-\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{2}qq - \frac{1}{27}p^3)})^{1:3} + (-\frac{1}{2}q - \sqrt{(\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3)})^{1:3}$.

Die 1. Anmerckung.

337. Diese Regeln werden insgemein *Cardani* Regeln genennet, weil er sie aus *Scipionis Ferrei* Erfindung zuerst in Druck gegeben hat.

Die 2. Anmerckung.

338. Damit aber ihr Gebrauch erhelle, so will ich ein und das andere Exempel anführen. Es sey $x^3 = * 6x + 40$. Weil $p = 6$, $q = 40$, und daher $\frac{1}{2}q = 20$, $\frac{1}{4}qq = 400$, $\frac{1}{3}p = 2$, $\frac{1}{27}p^3 = 8$; so ist, vermöge der ersten Regel, $x = (20 - \sqrt{(400 - 8)})^{1:3} + (20 + \sqrt{(400 - 8)})^{1:3} = (20 - \sqrt{392})^{1:3} + (20 + \sqrt{392})^{1:3}$ = (wenn die cubic-Wurtzel beyderseits würcklich ausgezogen wird) $2 - \sqrt{2} + 2 + \sqrt{2} = 4$. Ist demnach 4 eine wahre Wurtzel.

Es sey $x^3 = * - 3x + 36$. Weil $p = -3$, $q = 36$, und daher $\frac{1}{2}q = 18$, $\frac{1}{4}qq = 324$, $\frac{1}{3}p = -1$, $\frac{1}{27}p^3 = -1$; so ist, vermöge der andern Regel, die Wurtzel $(18 - \sqrt{(324 + 1)})^{1:3} + (18 + \sqrt{(324 + 1)})^{1:3}$ = (wenn ihr die cubic-Wurtzel beyderseits würcklich ausziehet) $1\frac{1}{2} - \sqrt{3\frac{1}{4}} + 1\frac{1}{2} + \sqrt{3\frac{1}{4}} = 3$.

Es sey $x^3 = * 6x - 40$. Weil $p = 6$, $q = -40$, und daher $\frac{1}{2}q = -20$, $\frac{1}{4}qq = 400$, $\frac{1}{3}p = 2$, $\frac{1}{27}p^3 = 8$; so ist, vermöge der dritten Regel, $(-20 + \sqrt{(400 - 8)})^{1:3} + (-20 - \sqrt{(400 - 8)})^{1:3} = (-20 - \sqrt{392})^{1:3} + (-20$

$+ \sqrt{392})^{1:3} =$ (wenn die cubic-Wurtzel beyderseits würcklich ausgezogen wird) $-2 - \sqrt{2} + \sqrt{2} - 2 = -4$. Demnach ist 4 eine falsche Wurtzel der vorgegebenen Gleichung.

Die 3. Anmerckung.

339. Man hat zwar auf eine gleiche Art eine Regel für die Wurtzeln aus einer Gleichung von dem vierten Grade auszuziehen gefunden: allein weil sie nicht sonderlich gebraucht wird, so will ich die Anfänger damit nicht aufhalten, sondern gehe vielmehr fort und zeige, wie man durch Näherung die Wurtzel finden kan, wenn eine Gleichung keine rational-Wurtzel hat.

Die 116. Aufgabe.

340. **Aus einer jeden gegebenen Gleichung die Wurtzel durch Näherung zu finden.**

Auflösung.

Wir wollen die Regeln bald bey Exempeln anbringen, und zwar den Anfang von einer quadratischen Gleichung machen, damit wir sie desto besser begreifen.

Es sey demnach $x^2 - 5x - 31 = 0$. Setzet, vermöge der Grentzen, welche die Gleichung haben kan (§. 333), die Wurtzel sey $8 + y$, dergestalt, daß y einen Bruch bedeutet, um welchen 8 entweder grösser oder kleiner ist als x. Solchergestalt ist

$$\begin{aligned} x^2 &= 64 + 16y + y^2 \\ -5x &= -40 - 5y \\ -31 &= -31 \\ \hline & -7 + 11y + y^2 = 0. \end{aligned}$$

Da

Da nun die Dignitäten eines Bruches beständig abnehmen, und man hier nur die Wurzel beynahe wissen will, so läßt man y^2 weg, und nimt an,

$$-7+11y=0$$

das ist $11y=7$

$$y=0.6=0.\tfrac{6}{10}.$$

Also ist $x=8+0.6=8.6$.

Weil der Werth von x in zehen-Theilchen noch nicht genau genug bestimmet ist; so setzet $x=8.6+y$, und verfahret wie vorhin. Ihr findet demnach

$$x^2=\tfrac{7396}{100}+\tfrac{172}{10}y+y^2$$
$$-5x=-\tfrac{430}{10}-5y$$
$$-31=-31$$

$$\tfrac{7396}{100}-\tfrac{430}{10}-31+\tfrac{172}{10}y-5y=0.$$

Das ist, wenn man die Brüche unter einerley Benennung bringet (welches hier, den Anfängern zugefallen, einmal für allemal geschehen soll)

$$73.96=4300-3100+(1720-500)y=0$$

$$-0.04+12.20y=0$$

$$12:20y=0.04$$

$$y=0.0032.$$

Also

Also ist $x = 8.6000 + 0.0032 = 8.6032$. Wenn ihr die Wurtzel noch genauer verlanget; so setzet $x = 8.6032 + y$. Alsdenn ist

$$x^2 = 74.01505024 + 17.20640000y + y^2$$
$$-5x = -43.01600000 - 5.00000000y$$
$$-31 = -31.00000000$$
$$-0.00094976 + 12.20640000y = 0$$
$$12.20640000y = 0.00094976$$
$$y = 0.000077808.$$

Also ist $x = 8.603277808$.

Man soll ferner die Wurtzel aus der cubischen Gleichung $x^3 + 2x^2 - 23x - 70 = 0$ ausziehen. Setzet,

$$5 + y = x$$

so ist
$$x^3 = 125 + 75y \ldots$$
$$+2x^2 = +50 + 20y \ldots$$
$$-23x = -115 - 23y$$
$$-70 = -70$$
$$-10 + 72y = 0$$
$$72y = 10$$
$$y = 0.1.$$

Also ist $x = 5 + 0.1 = 5.1$.

Setzet

Setzet ferner, $x = 5.1 + y$; so ist

$$\begin{aligned} x^3 &= 132.651 + 78.030y \ldots \\ +2x^2 &= +52.020 + 20.400y \ldots \\ -23x &= -117.300 - 23.000y. \\ -70 &= -70.000 \\ \hline & -2.629 + 75.430y = 0 \\ \hline & 75.430y = 2.629 \\ \hline & y = 0.0348. \end{aligned}$$

Also ist $x = 5.1 + 0.0348 = 5.1348$.

Wolte man die Wurzel noch genauer haben; so setzte man $x = 5.1348 + y$, und suchte den Werth von y, wie vorhin.

Wenn ihr die Wurzel geschwinder in vielen Zahlen genau haben wollet; so müsset ihr noch den Werth von y^2 beybehalten, und die quadratische Gleichung auf gewöhnliche Art (§. 83) auflösen, nur daß ihr zehentheilige Brüche behaltet. Nemlich wenn $x = 5 + y$; so ist

$$x^3 = 125 + 75y + 15y^2$$
$$+2x^2 = +50 + 20y + 2y^2$$
$$-23x = -115 - 23y$$
$$-70 = -70$$

$$-10 + 72y + 17y^2 = 0$$

$$17y^2 + 72y = 10$$

$$y^2 + 4.2352y = 0.58823530$$
$$4.48422976 \quad 4.48422976$$

$$y^2 + 4.2352y + 4.48422976 = 5.07246506$$

$$y + 2.1176 = 2.2522$$

$$y = 0.1346.$$

Also ist $x = 5.1346$.

Woltet ihr nun setzen, $x = 5.1346 + y$, und wie vorhin den Werth von y finden; so würdet ihr gleich durch die andere Rechnung sehr weit hinauf kommen.

Die 1. Anmerckung.

341. In meinen Element. Analys. (§. 327) habe ich gewiesen, wie auf diese Art gar leicht die Regel des Herrn *Halley* heraus gebracht werde, aus welcher man in Engelland sehr viel macht. Allein, weil die gegebene Regel eben so geschwind den Werth der Wurtzel in so kleinen Theilen giebt, und doch viel leichter als die Halleyanische zu behalten ist, indem sie die Klarheit ihres Beweises mit sich führet: so kan man am sichersten bey derselben verbleiben.

Die 2. Anmerckung.

342. Nun könte ich auch zeigen, wie der Werth von x in den gegebenen Gleichungen geometrisch gesucht wird.

wird. Allein, weil die geometrische Ausführung der determinirten Aufgaben sich am besten aus der Ausführung der undeterminirten herleiten läßt; so will ich zuerst arithmetische Exempel von dergleichen Aufgaben beybringen, zumal, da sie in der höhern Geometrie und der differential-Rechnung mehr Nutzen haben, als wol einige vermeinen, auch besondere Kunstgriffe nachzusinnen an die Hand geben.

Von den undeterminirten Aufgaben.

Die 117. Aufgabe.

343. **Vier Zahlen von der Beschaffenheit zufinden, daß die Summe der beyden ersten der dritten, und ihre Differenz der vierten Zahl gleich sey.**

Auflösung.

Es sey die erste Zahl x, die andere y, die dritte z, die vierte t, so ist

$y + x = z$	$x - y = t$
$2y + t = z$	$x = t + y$
$2y = z - t$	$x = t + \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}t$
$y = (z - t) : 2$	$x = (z + t) : 2.$

Da nun nicht mehr Gleichungen zuerdencken sind, so können die Zahlen z und t nach Belieben angenommen werden. Es sey $z = 8$, $t = 2$; so ist $x = (8 + 2) : 2 = 10 : 2 = 5$, und $y = (8 - 2) : 2 = 6 : 2 = 3$. Es sey $z = 5$, $t = 1$; so ist $x = (5 + 1) : 2 = 6 : 2 = 3$, $y = (5 - 1) : 2 = 4 : 2 = 2$.

An-

Anmerckung.

344. Wenn ihr gantze Zahlen verlanget, so müssen vor z und t solche angenommen werden, deren Summe und Differentz sich durch 2 dividiren läßt.

Die 118. Aufgabe.

345. **Zwo Zahlen zufinden, deren Summe zugleich mit ihrem Producte einer gegebenen Zahl gleich ist.**

Auflösung.

Es sey die gegebene Zahl $= a$, die eine von den begehrten $= x$, die andere $= y$, so ist

$$xy + x + y = a$$

$$xy + x = a - y$$

$$x = (a - y) : (y + 1).$$

Es sey $a = 30$, $y = 2$, so ist $x = (30 - 2) : (2 + 1) + 28 : 3 = 9\frac{1}{3}$. Es sey $a = 20$, $y = 2$, so ist $x = (20 - 2) : (2 + 1) = 18 : 3 = 6$. Es sey $a = 19$, $y = 4$, so ist $x = (19 - 4) : (4 + 1) = 15 : 5 = 3$.

Die 119. Aufgabe.

346. **Zwo Zahlen zufinden, deren Product ein vollkommener Cubus ist, dessen Wurtzel dem Producte aus der ersten in das Quadrat der andern gleich ist.**

Auflösung.

Es sey die erstere Zahl $= x$, die andere $= y$, die cubic-Wurtzel $= v$; so ist

$v =$

$$\frac{v = xy^2}{v : y^2 = x} \qquad \frac{xy = v^3}{x = v^3 : y}$$

$$v : y^2 = v^3 : y$$

$$\overline{}\ y^2$$

$$v = v^3 y$$

$$\overline{}\ v$$

$$1 = v^2 y$$

$$1 : v^2 = y.$$

Derowegen ist $v^5 = x$.

Setzet $v = 2$; so ist $x = 32$, $y = \frac{1}{4}$. Es sey $v = 3$; so ist $x = 243$, $y = \frac{1}{9}$.

Die 120. Aufgabe.

347. **Die Summe zweyer vollkommenen Quadrate in zwey andere vollkommene Quadrate zutheilen.**

Auflösung.

Es sey die Seite des grössern Quadrats $= a$, des kleinern $= b$: die Seite des einen von den gesuchten $a - z$, des andern $yz - b$. So ist

$$aa - 2az + zz + y^2z^2 - 2byz + bb = aa + bb$$

$$zz + yyzz = 2byz + 2az$$

$$\overline{}\ z$$

$$z + yyz = 2by + 2a$$

$$\overline{}\ 1 + y^2$$

$$z = (2by + 2a) : (y^2 + 1)$$

Also ist $= a - z = a - (2by + 2a) : (y^2 + 1) = (ay^2 + a - 2by - 2a) : (y^2 + 1) = (ay^2 - 2by - a) : (y^2 + 1)$. Hingegen $yz - b = (2by^2 + 2ay) : (y^2 + 1) - b = (2by^2 + 2ay - by^2 - b) : (y^2 + 1) = (by^2 + 2ay - b) : (y^2 + 1)$.

Es sey $a = 3$, $b = 2$, $y = 2$; so ist $z = (8 + 6) : 5 = 14 : 5$, folglich $a - z = 3 - 14 : 5 = \frac{1}{5}$, und $yz - b = 28 : 5 - 2 = (28 - 10) : 5 = 18 : 5$. Deren Quadrate $(1 + 324) : 25 = 13 = 9 + 4$.

Man nimt die beyden Seiten $a - z$ und $yz - b$ an, weil von der Summe der beyden Quadrate sich $aa + bb$ muß abziehen, und das übrige durch z dividiren lassen, wenn der Werth von z rational seyn soll.

Die 121. Aufgabe.

348. **Zwey vollkommene Quadrate zu finden, deren Differenz einer gegebenen Zahl gleich ist.**

Auflösung.

Es sey die Seite des kleinern $= x$, des grössern $x + y$, die Differenz $= d$. So ist das kleine Quadrat $= x^2$, das große $x^2 + 2xy + y^2$, folglich

$$y^2 + 2xy = d$$

$$2xy = d - y^2$$

$$x = (d - y^2) : 2y$$

Weil

Weil sich y^2 von d abziehen läßt, so muß y kleiner seyn als $\surd d$.

Z. E. Es sey $d = 10$, $y = 3$; so ist $x = (10 - 9) : 6 = \frac{1}{6}$, $x + y = 3 + \frac{1}{6}$. Es sey $d = 11$, $y = 2$; so ist $x = (11 - 4) : 4 = \frac{7}{4}$, $x + y = 2 + \frac{7}{4} = \frac{15}{4}$.

Man nimt die Seite des großen Quadrats $x + y$ an, und nicht bloß y, damit der Werth von x rational gefunden wird.

Die 122. Aufgabe.

349. *Eine Zahl in zwo andere zuzertheilen, deren Product ein vollkommenes Quadrat ist.*

Auflösung.

Es sey die Zahl $= 2a$, die Differenz $= 2y$; so ist die große $a + y$, die kleine $a - y$ (§. 61), ihr Product $= aa - yy$. Setzet die Seite des Quadrats $xy - a$. So ist

$$aa - yy = aa - 2axy + x^2y^2$$

$$2axy = x^2y^2 + y^2 \quad | : y$$

$$2ax = x^2y + y \quad | : x^2 + 1$$

$$2ax : (x^2 + 1) = y.$$

Es sey $x = 2$, $2a = 10$; so ist $y = 20 : 5 = 4$, $a + y = 5 + 4 = 9$, $a - y = 5 - 4 = 1$.

Es sey $2a = 10$, $x = 0$; so ist $y = 0$, folglich $a + y = 5$, $a - y = 5$.

Es sey $2a=10$, $x=3$; so ist $y=30:10=3$, $a+y=5+3=8$, $a-y=5-3=2$.

Die Seite des Quadrats wird $xy-a$ angenommen, damit man in der Gleichung aa wegbringen, und das übrige durch y dividiren kan, damit der Werth von y rational gefunden wird.

Die 123. Aufgabe.

350. Zwo Zahlen zufinden von der Beschaffenheit, daß, wenn die eine zu dem Quadrate der andern gesetzt wird, die Summe ein Quadrat sey, deren Seite die Summe der Zahlen ist.

Auflösung.

Es sey die eine Zahl x, die andere y; so ist

$$x^2+y=x^2+2xy+y^2$$

$$y-y^2=2xy \quad | \; 2y$$

$$(1-y):2=x.$$

Es sey $y=\frac{1}{2}$; so ist $x=\frac{1}{2}:2=\frac{1}{4}$. Es sey $y=\frac{1}{3}$; so ist $x=(1-\frac{1}{3}):2=\frac{2}{3}:2=\frac{1}{3}$.

Die 124. Aufgabe.

351. Zwo Zahlen zufinden von der Beschaffenheit, daß, wenn die eine zu dem Quadrate der andern gesetzt wird, die Summe die Seite eines Quadrats sey, welche den beyden Zahlen gleich ist.

Auflösung.

Es sey die eine Zahl z, die andere y; so ist

$$z^2 + y = \sqrt{(z + y)}$$

$$z^4 + 2z^2y + yy = z + y$$

$$z^4 + 2z^2y - y + yy = z,$$

das ist, wenn $2z^2 - 1 = v$,

$$vy + yy = z - z^4$$

$$\tfrac{1}{4}v^2 + vy + yy = \tfrac{1}{4}v^2 + z - z^4$$

$$\tfrac{1}{2}v + y = \sqrt{(\tfrac{1}{4}v^2 + z - z^4)}$$

$$y = \sqrt{(\tfrac{1}{4}v^2 + z - z^4)} - \tfrac{1}{2}v,$$

das ist, wenn ihr für v wieder seinen Werth in die Stelle setzet,

$$y = \sqrt{(z^4 - z^2 + \tfrac{1}{4} + z - z^4)} - z^2 + \tfrac{1}{2},$$

das ist $y = \sqrt{(\tfrac{1}{4} + z - z^2)} + \tfrac{1}{2} - z^2$.

Wenn ihr nun rational-Zahlen verlanget; so muß $\tfrac{1}{4} + z - z^2$ ein vollkommenes Quadrat seyn.

Setzet demnach seine Seite $= zx - \tfrac{1}{2}$ (§. 349); so ist

$$z^2x^2 - zx + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + z - z^2$$

$$z^2x^2 - zx = z - z^2$$

$$zx^2 - x = 1 - z$$

$$zx^2 + z = x + 1$$

$$z = (x + 1) : (x^2 + 1).$$

Es sey $x = 2$; so ist $z = (2 + 1) : (4 + 1, = \frac{3}{5}$, folglich $y = \frac{1}{2} - \frac{9}{25} + \sqrt{(\frac{1}{4} + \frac{3}{5} - \frac{9}{26})} = (25 - 18) : 50 + \sqrt{((25 + 24) : 100)} = 7 : 50 + \sqrt{(49 : 100)} = \frac{7}{50} + \frac{7}{10} = \frac{70 + 350}{500} = \frac{420}{500} = \frac{21}{25}$.

Die 125. Aufgabe.

352. **Zwey Quadrate von der Beschaffenheit zufinden, daß, wenn ihr das eine zu dem Producte von beyden addiret, eine jede Summe ein vollkommenes Quadrat sey.**

Auflösung.

Es sey das eine Quadrat x^2, das andere y^2, so ist ihr Product x^2y^2; folglich sind $x^2y^2 + x^2$ und $x^2y^2 + y^2$ vollkommene Quadrate. Dividiret das erstere durch x^2, das andere durch y^2; so sind $y^2 + 1$ und $x^2 + 1$ gleichfalls vollkommene Quadrate. Nennet die Seite des erstern $z - y$, des andern $t - x$, damit sich y^2 und x^2 subtrahiren läßt, folglich der Werth

von

von y und x rational gefunden werden mag; so ist

$$y^2+1=z^2-2zy+y^2,\qquad x^2+1=t^2-2tx+x^2$$
$$1=z^2-2zy\qquad 1=t^2-2tx$$
$$1+2zy=z^2\qquad 2tx=t^2-1$$
$$y=(z^2-1):2z\qquad x=(t^2-1):2t.$$

Es sey $z=2$, $t=3$; so ist $y=(4-1):4$ $=\frac{3}{4}$ und $x=(9-1):6=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$.

Es sey $z=3$, $t=4$; so ist $y=(9-1):6$ $=\frac{4}{3}$, $x=(16-1):8=\frac{15}{8}$.

Die 126. Aufgabe.

353. **Zwey Quadrate von der Beschaffenheit zu finden, daß, wenn ihre Summe zu ihrem Producte gesetzt wird, ein vollkommenes Quadrat herauskommt.**

Auflösung.

Es sey das eine Quadrat x^2, das andere y^2, so ist $x^2y^2+x^2+y^2$ ein vollkommenes Quadrat. Setzet anfangs aus vorhin (§. 352) angeführtem Grunde,

$$y^2-2ty+tt=yy+1$$

so ist $t^2=1+2ty$

$$(t^2-1):2t=y$$
$$t-y=t-(t^2-1):2t=(t^2+1):2t.$$

Setzet ferner $v = \sqrt{(yy + 1)} = t - y = (t^2 + 1) : 2t$; so ist $x^2y^2 + x^2 + y^2 = x^2v^2 + y^2$. Stellet dessen Seite $= z - vx$ (§. 349); so ist

$$x^2v^2 + y^2 = z^2 - 2vxz + v^2x^2$$

$$y^2 = z^2 - 2vxz$$

$$2vxz = z^2 - y^2$$

$$x = (z^2 - y^2) : 2vz.$$

Hier werden z und t nach Gefallen angenommen.

Es sey z. E. $z = 2$, $t = 3$; so ist $y = (9 - 1) : 6 = 8 : 6 = \frac{4}{3}$, $v = t - y = 3 - \frac{4}{3} = \frac{5}{3}$, und also

$$x = \left(4 - \frac{16}{9}\right) : \frac{20}{3} = \frac{(36 - 16)}{9} : \frac{20}{3} = \frac{20}{9} : \frac{20}{3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

Die 127. Aufgabe.

354. **Zwo Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, daß, wenn ihr Product zu der Summe ihrer Quadrate gesetzt wird, ein vollkommenes Quadrat heraus kommt.**

Auflösung.

Es sey die Summe der beyden Zahlen $2x$, ihre Differentz $2y$, die Seite des Quadrats $t + y$; so ist die grössere Zahl $x + y$, die kleinere $x - y$, und demnach

x^2

$x^2 - y^2 + x^2 + 2xy + yy + x^2 - 2xy + yy$, d. i.

$$3x^2 + y^2 = t^2 + 2ty + yy$$

$$3x^2 - t^2 = 2ty$$

$$(3x^2 - t^2) : 2t = y.$$

Es sey $x = 4$, $t = 6$; so ist $y = (48 - 36) : 12 = 12 : 12 = 1$, folglich $x + y = 4 + 1 = 5$, $x - y = 4 - 1 = 3$.

Die 128. Aufgabe.

355. **Eine Zahl von der Beschaffenheit zufinden, daß, wenn sie durch zwo bekannte Zahlen multiplicirt wird, beyde Producte ein vollkommenes Quadrat sind.**

Auflösung.

Es sey die eine gegebene Zahl $= a$, die andere b, die gesuchte x, das eine Quadrat y^2, das andere v^2; so ist

$$ax = y^2 \qquad bx = v^2$$

$$x = y^2 : a \qquad x = v^2 : b$$

$$y^2 : a = v^2 : b$$

$$by^2 = av^2$$

$$y^2 = av^2 : b$$

$$y = v\sqrt{(a : b)}.$$

Wenn demnach eine rational-Zahl gefunden werden soll; so muß $a:b$ ein vollkommenes Quadrat seyn.

Es sey $a=32$, $b=8$; so ist $\sqrt{(a:b)}=2$. Setzet $v=5$; so ist $y=10$, folglich $x=\frac{25}{8}$.

Die 129. Aufgabe.

356. **Eine Zahl zufinden von der Beschaffenheit, daß, wenn sie durch zwo gegebene Zahlen multiplicirt, und zu jedem Producte noch eine andere Zahl addirt wird, beyderseits ein vollkommenes Quadrat herauskommt.**

Auflösung.

Es seyn die ersten beyden gegebenen Zahlen a und b, die andern c und d, die gesuchte x, die beyden Quadrate yy und vv; so ist

$$ax+c=yy \qquad bx+d=vv$$

$$x=(yy-c):a \qquad x=(vv-d):b$$

$$(yy-c):a=(vv-d):b$$

$$byy-bc=avv-ad$$

$$byy=av^2-ad+bc \qquad b$$

$$y^2=(av^2-ad+bc):b$$

$$y=\sqrt{((av^2-ad+bc):b)}.$$

Wenn

Wenn ihr nun eine rational-Zahl verlanget, so setzet $a:b=m^2$; so ist

$$y^2 = m^2v^2 - m^2d + c.$$

Setzet ferner für die Seite dieses Quadrats $t - mv$, oder $mv - t$ (§. 349); so ist

$$m^2v^2 - m^2d + c = m^2v^2 - 2tmv + t^2$$

$$2tmv = t^2 + m^2d - c$$

$$v = (t^2 + m^2d - c) : 2tm.$$

das ist, wenn ihr für m^2 seinen Werth wieder hinsetzet $v = (bt^2 + ad - bc) : 2tbm$.

Es sey $t=4$, $a=1$, $b=1$, $c=2$, $d=3$; so ist $m^2 = 1:1 = 1$, und $m=1$, folglich $v = (16+3-2):8 = 17:8 = 2\frac{1}{8}$, und $x = 289:64 - 3 = (289-192):64 = 97:64$.

Von den geometrischen Oertern.

Die 38. Erklärung.

357. Die Linie, durch welche eine undeterminirte Aufgabe geometrisch aufgelöset wird, heißt ein geometrischer Ort (Locus geometricus). Insonderheit nennet man es einen Ort an einer geraden Linie, wenn sie eine gerade Linie ist: einen Ort an dem Circul, wenn sie ein Circul: einen Ort an der Parabel, Hyperbel, ELLI-

ELLIPSI u. s. w. wenn sie eine von diesen Linien ist.

Die 39. Erklärung.

358. **Der Ort an einer geraden Linie wird** ein einfacher Ort (Locus simplex); **der an einem Circul**, ein ebener Ort (Locus planus); **der an einer Parabel, Hyperbel und** *Ellipsi*, ein cörperlicher Ort (Locus solidus) **genennet.**

Die 130. Aufgabe.

359 **Einen Ort an einer geraden Linie zubeschreiben.**

Auflösung.

Einen Ort beschreiben heißt die Linie ziehen welche der undeterminirten Aufgabe ein Gnügen thut. Alle Oerter an einer geraden Linie lassen sich durch folgende Gleichungen vorstellen:

$$y = \frac{ax}{b} \qquad y = \frac{ax}{b} \mp c \qquad y = c - \frac{ax}{b}.$$

Tab. V. Fig. 45. Ziehet also eine gerade Linie AB, und machet AI $= b$. Ziehet unter einem beliebigen Winckel EI $= a$. Wenn PM, pm &c. mit EI parallel gezogen werden; so sind AP, Ap &c. $= x$, PM, pm &c. $= y$. Denn (§. 184 *Geom.*).

AI:

$$AI : IE = AP : PM$$
$$b : a = x : y$$
$$ax : b = y.$$

Verlängert EI in G, bis IG $= c$, und ziehet durch G die Linie Dq mit AB, AD mit EG parallel. Wenn PM bis in Q verlängert wird; so ist DQ $=$ AP $= x$, und QM $= \frac{ax + c}{b} = y$.

Hingegen machet LG $= b$ und GE $= a$, IG $= c$; so ist QM $= ax : b$ (§. *184 Geom.*) und PM $= \frac{ax}{b} = c$.

Endlich sey AC $= c$, und AD $= b$. Ziehet durch D die Linie FE mit AC parallel, und machet DE $= a$. Ziehet ferner die Linie AL, und mit ihr CB, hingegen NM mit AC parallel; so ist PN $= ax : b$ (§. *184 Geom.*), folglich PM $=$ MN $-$ NP $= c - ax : b$. Tab. V. Fig. 46.

Die 131. Aufgabe.

360. **Einen jeden Ort an einer Parabel zubeschreiben.**

Auflösung.

Es können zween Fälle vorkommen. Denn es beziehen sich die Linien x und y entweder auf die Höhlung, oder das erhabene der Parabel.

Im

Tab. V. Fig. 47.

Im erstern Falle sey KD = PN = n, AK = p, DH = q, LH = r, DL = s, der Parameter = t, DQ = x, QM = y; so ist (§. 184 *Geom.*).

$$DH : HL = DQ : QN$$
$$q : r = x : \frac{rx}{q}$$

$$DH : DL = DQ : DN$$
$$q : s = x : \frac{sx}{q}.$$

Demnach AP = KP (= DN) — KA = $\frac{sx}{q} - p$, und PM = QM — QN — PN = $y - \frac{rx}{q} - n$, folglich, weil $t.AP = PM^2$ (§. 217).

$$y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2 = \frac{tsx}{q} - tp.$$

das ist:

$$y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2 = 0$$
$$- \frac{tsx}{q} + tp$$

Tab. V. Fig. 48.

Im andern Fall sey DK = PN = n, AK = p, DH = q, LH = r, DL = s, DQ = IM = y, QM = DI = x; so ist (§. 184 *Geom*).

DH

$$DH : HL = DQ : QN$$
$$q : r = y : \frac{ry}{q}$$

$$DH : DL = DQ : DN$$
$$q : s = y : \frac{sy}{q}.$$

Demnach $AP = KP (= DN) - AK = \frac{ty}{q} - p$, u.

$PM = QM - QN - NP = x - \frac{ry}{q} - n$, folglich,

weil $t.AP = PM^2$ (§. 217),

$$x^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2y^2}{q^2} - 2nx + \frac{2rny}{q} + n^2 = \frac{tsy}{q} - tp$$

das ist:

$$x^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2y^2}{q^2} - 2nx + \frac{2rny}{q} + n^2 = 0$$
$$- \frac{tsy}{q} + tp.$$

Wenn ihr nun die Glieder einer gegebenen Gleichung mit denen Gliedern einer von den gefundenen vergleichet, so könnet ihr in jedem Falle finden, wie groß die Linien DK AK, DH und LH in dem vorkommenden Falle anzunehmen sind, oder welche von ihnen gar weg bleiben, und solchergestalt den verlangten Ort beschreiben.

Z. E.

Z. E. Es sey $y^2 - ax = 0$; so ist, vermöge der ersten Gleichung,

$$-\frac{2r}{q} = 0, \quad -2n = 0, \quad -\frac{tf}{q} = -a, \quad n^2 + tp = 0$$

$$n = 0 \qquad p = 0$$

$$r = 0,\ q = s \qquad t = a$$

Tab. V. Fig. 47.

Weil demnach LH $= o$, und DK $= o$; so fällt die Linie DH auf KP, und, weil AK $= o$, der Punct K in A, folglich DQ in AP, und QM in PM, und ist weiter nichts nöthig, als daß mit dem Parameter a eine Parabel beschrieben wird. Denn so ist AP $= x$ und PM $= y$.

Wiederum, es sey $y^2 - ay - bx + \frac{1}{4}aa = o$; so ist, vermöge der ersten Gleichung,

$$-\frac{2r}{q} = o, \quad -2n = -a, \quad -\frac{tf}{q} = -b$$

$$n = \tfrac{1}{2}a$$

$$r = o,\ q = s \qquad t = b$$

$$n^2 + tp = \tfrac{1}{4}aa$$

$$\tfrac{1}{4}aa + bp = \tfrac{1}{4}aa$$

$$bp = o$$

$$p = o.$$

Tab. V. Fig. 47. Tab. VI. Fig. 49.

Weil demnach LH $= o$, so fällt DH auf DL. Weil KA $= o$; so fällt K in A. Solchergestalt wird mit dem Parameter b eine Parabel AMR beschrieben, auf der Axe AB in A ein

einen Perpendicul AL $= \frac{1}{2}a$ aufgerichtet, und LQ mit AB QM aber mit LA parallel gezogen; so ist LQ $= x$, QM $= y$. Denn, weil PM $= y - \frac{1}{2}a$; so ist

$$y^2 - ay + \frac{1}{4}aa = bx \text{ (§. 217).}$$

folglich $y^2 - ay - bx + \frac{1}{4}aa = o.$

Es sey $y^2 - ay - bx - cc = o$; so ist, vermöge der ersten Gleichung,

$$\frac{-2r = o}{q} \qquad \frac{-2n = -a}{n = \frac{1}{2}a} \qquad \frac{-tf = -b}{q}$$

$$r = o, q = f \qquad\qquad t = b$$

$$n^2 + tp = -cc$$

$$\frac{1}{4}aa + bp = -cc$$

$$bp = -cc - \frac{1}{4}aa$$

$$p = \frac{-cc - \frac{1}{4}aa}{b.}$$

Beschreibet mit dem Parameter b eine Parabel AMR, und richtet in A auf die Axe AN eine perpendicular-Linie AH auf. Machet AE $= \frac{1}{2}a$, AF $= c$; so ist EF $= \sqrt{(\frac{1}{4}aa + cc)}$. Machet EF $=$ AI $=$ AG, und AH $= b$; ziehet die Linie HI, und mit ihr GK parallel; so ist AK $= (cc + \frac{1}{4}aa) : b$. Wenn nun endlich EQ mit der Axe AN und DK, ingleichen QM mit

Tab. VI. Fig. 50.

EA parallel gezogen werden; so ist $DQ = x$, und $QM = y$. Denn $AP = EQ = AK + KP = \frac{cc + \frac{1}{4}aa}{b} + x$, und $PM = y - \frac{1}{2}a$, folglich, weil $PM^2 = t.AP$ (§. 217).

$$y^2 - ay + \tfrac{1}{4}aa = cc + \tfrac{1}{4}aa + bx$$

das ist, $y^2 - ay - bx - cc = o$.

Die 132. Aufgabe.

361. *Einen Ort an einer Ellipsi zubeschreiben.*

Auflösung.

Tab. VI. Fig. 51.

Es sey in C der Mittelpunct der Axe, $CK = p$, $KD = PN = n$, $DH = q$, $LH = r$, $DL = s$, $AC = CB = m$, der Parameter $= t$, $DQ = x$, $QM = y$; so ist (§. 185 Geom.).

$$DH : HL = DQ : QN$$
$$q : r = x : \frac{rx}{q}$$
$$DH : DL = DQ : DN$$
$$q : s = x : \frac{sx}{q}.$$

Daher $CP = DN - KC = \frac{sx}{q} - p$, und

$$PM = QM - QN - PN = y - \frac{rx}{q} - n.$$

Da nun in der Ellipsi (§. 239).

t : 2

$$t : 2m = PM^2 : AP\,PB$$

u. $PM^2 = y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2$

$AP = m + \frac{sx}{q} - p$, und $PB = m - \frac{sx}{q} + p$

also $AP.PB = m^2 - p^2 + \frac{2psx}{q} - \frac{s^2x^2}{q^2}$;

so ist $y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2 =$

$$\frac{tm^2 - tp^2}{2m} + \frac{2tpsx}{2mq} - \frac{ts^2x^2}{2mq^2},$$ folglich

$$y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2 + \frac{ts^2x^2}{2mq^2} - \frac{2tpsx}{2mq} + \frac{tp^2}{2m} - \frac{tm^2}{2m} = 0.$$

Wenn ihr die vorgegebenen Gleichungen, wie vorhin in der Parabel, mit dieser allgemeinen vergleichet; so werdet ihr in jedem Falle den Ort an der Ellipsi beschreiben können.

Z. E. Es sey $y^2 + \frac{cx^2}{b} + \frac{cdx}{b} - \frac{a^2c}{b} = 0$;

so ist

$$-\frac{2r}{q}=0 \qquad \frac{ts^2}{2mq^2}=\frac{c}{b} \qquad -2n=0 \qquad -\frac{2tps}{2mq}=\frac{cd}{b}$$

$$r=0,\ q=s \qquad \frac{t}{2m}=\frac{c}{b} \qquad n=0 \qquad -2p=d$$

$$p=-\tfrac{1}{2}d$$

$$\frac{tp^2}{2m}-\frac{tm^2}{2m}=-\frac{a^2c}{b}$$

$$\frac{cp^2}{b}-\frac{cm^2}{b}=-\frac{a^2c}{b}$$

$$p^2-m^2=-a^2$$

$$\tfrac{1}{4}dd+aa=m^2$$

$$\surd(\tfrac{1}{4}dd+aa)=m.$$

Tab. VI. Fig. 52.

Richtet demnach auf der Linie AB in C die Linie CE $= a$ perpendicular auf, und machet KC $= \frac{1}{2}d$; so ist, KE $= \surd(\frac{1}{4}dd + aa)$. Machet chet CA = CB = KE; so ist AB die Axe der Ellipsis. Machet ferner CH $= b$ und CI $= c$; ziehet die Linie HI, und mit ihr AG parallel; so ist GC der halbe Parameter. Machet endlich CO = CG, und beschreibet über AO einen halben Circul; so ist CL die halbe kleine Axe, und ihr könnet die Ellipsin ALB (§. 257) beschreiben, in welcher KP $= x$, und PM $= y$. Denn CP $= x + \frac{1}{2}d$, AP $= \surd(\frac{1}{4}dd + aa) + x + \frac{1}{2}d$, PB $= \surd(\frac{1}{4}dd + aa) - x - \frac{1}{2}d$, und daher AP.PB $= aa - xx - dx$. Da nun $c : b =$ PM^2 : AP.PB $= y^2 : aa - xx - dx$ (§. 239); so ist $y^2 =$

$$y^2 = \frac{a^2c}{b} - \frac{cx^2}{b} - \frac{cdx}{b}$$

folglich $y^2 + \frac{cx^2}{b} + \frac{cdx}{b} - \frac{a^2c}{b} = 0$.

Zusatz.

362. Wenn man $t = 2m$ setzet, so kommt die Gleichung für alle Oerter in dem Circul.

$$y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2 = 0$$
$$+ \frac{f^2x^2}{q^2} - \frac{2pfx}{q} + p^2 - m^2.$$

Die 133. Aufgabe.

363. **Einen Ort an einer Hyperbel zu beschreiben.**

Auflösung.

Es sey die zwerch-Axe $AB = 2m$, in C der Mittel-Punct, $CK = p$, $KD = PN = n$, $DH = q$, $LH = r$, $DL = f$, $DQ = x$, $QM = y$, der Parameter $= t$; so ist (§. 185 *Geom.*). Tab. VI. Fig. 53.

$$DH : HL = DQ : QN$$
$$q : r = x : \frac{rx}{q}.$$

$$DH : DL = DQ : DN$$
$$q : s = x : \frac{sx}{q}.$$

Also ist $CP = DN (= KP) - CK = \frac{sx}{q} - p$, und

$$PM = QM - QN - PN = y - \frac{rx}{q} - n.$$

Nun ist $t : 2m = PM^2 : AP.PB$ (§. 260), und

$$PM^2 = y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2,$$

$$AP.PB = (CP - CA)(CP + CA) = CP^2 - CA^2$$
$$= \frac{s^2x^2}{q^2} - \frac{2psx}{q} + p^2 - m^2.$$

Derowegen:

$$y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2$$
$$= \frac{ts^2x^2}{2mq^2} - \frac{2tpsx}{2mq} + \frac{tp^2}{2m} - \frac{tm^2}{2m},$$ folglich:

$$y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2 = 0$$
$$- \frac{ts^2x^2}{2mq^2} + \frac{2tpsx}{2mq} + \frac{tm^2}{2m}$$
$$- \frac{tp^2}{2m}.$$

Wel-

Welche Gleichung eben so, wie die vorigen, gebraucht wird (§. 360, 361).

Die 134. Aufgabe.

364. *Einen Ort an einer Hyperbel zwischen ihren Asymptoten zubeschreiben.*

Auflösung.

Es seyn SA und AR die Asymptoten einer Hyperbel. Ziehet DL mit der einen AR parallel, und nach Belieben die Linie DH; hingegen KD, QM, LH, IR mit der andern AS parallel. Es sey ferner KD = PN = n, KA = p, DH = q, LH = r, DL = f, DQ = x, QM = y, RI = m, AR = DL = f; so ist (§. 184 *Geom.*). Tab. VI. Fig. 54.

$$DH : HL = DQ : QN$$
$$q : r = x : \frac{rx}{q}$$

$$DH : DL = DQ : DN$$
$$q : f = x : \frac{fx}{q}.$$

Derowegen ist $AP = DN - AK = \frac{fx}{q} - p$,

und $PM = QM - PN - NQ = y - n - \frac{rx}{q}$,

folglich, weil AR.RI = AP.PM (§. 282)

$$ms = \frac{syx}{q} - \frac{srx^2}{q^2} - py - \frac{snx}{q} + \frac{prx}{q} + pn$$

$$qms = syx - \frac{srx^2}{q} - qpy - snx + prx + pnq$$

$$qm = yx - \frac{rx^2}{q} - \frac{qpy}{s} - nx + \frac{prx}{s} + \frac{pnq}{s}$$

$$yx - \frac{rx^2}{q} - \frac{qpy}{s} + \frac{prx}{s} + \frac{pnq}{s} = 0$$
$$- ny - qm.$$

Tab. VI. Fig. 55.

Wenn alles, wie vorhin, bleibt, nur daß TM mit DH parallel gezogen, und QM = DT = x, hingegen TM = QD = y angenommen wird; so findet man, wie vorhin

$$xy - \frac{ry^2}{q} - \frac{pqx}{s} + \frac{pry}{s} + \frac{pnq}{s} = 0$$
$$- ny - mq.$$

Welche beyde Gleichungen eben wie die vorigen gebraucht werden.

Anmerckung.

365. Wenn man die gefundenen allgemeinen Gleichungen für die geometrischen Oerter gegen einander hält; so wird man folgende Regeln wahrnehmen, durch welche man urtheilen kan, ob eine gegebene Gleichung ein Ort an einer Parabel, oder Ellipsi, oder Hyperbel, oder einem Circul sey. Nemlich, wenn xy in einer Gleichung vorhanden ist, und 1) nur ein Quadrat entweder von x, oder von y durch andere Grössen multiplicirt, vorkommt; so ist der Ort an einer Hyperbel zwischen ihren Asymptoten. 2) Wenn das

das Quadrat von x oder y durch das Quadrat der halben Grösse multiplicirt ist, durch welche man xy multiplicirt befindet; so ist der Ort an einer Parabel. 3) Wenn x^2 und y^2 beyde das mehr-Zeichen + haben; so ist der Ort an einer Ellipsi, oder einem Circul: und zwar siehet man, daß er an einem Circul sey, wenn man $t:2m = 1$ findet. 4) Endlich, wenn x^2 und y^2 verschiedene Zeichen haben; so ist der Ort an einer Hyperbel, welche um ihre Axe beschrieben worden ist: welche beyde letztern Regeln 5) auch gelten, obgleich xy fehlet. Hingegen ist 6) in diesem letztern Falle in dem Orte an der Parabel auch x^2 nicht vorhanden.

Die 135. Aufgabe.

366. *Eine cubische und biquadratische Gleichung geometrisch auszuführen.*

Auflösung.

1. Wenn in der Gleichung nur eine unbekannte Grösse vorhanden ist, als y, so nimt man noch eine x dazu, und bringet die vorgegebene Gleichung auf geometrische Oerter.
2. Wenn man zween von diesen Oertern gebührend beschreibt, daß nemlich die Linien x und y beyderseits auf einander fallen; so giebt der Durchschnitt beyder Oerter den verlangten Werth von y.

Z. E. Die vorgegebene Gleichung sey $y^3 + aby = a^2c$; so ist $a:y = y^2 + ab : ac$

Setzet: $a:y = y:x$

so ist I. $ax = y^2$

daher $x = y^2 : a$

ingleichen $y:x = y^2 + ab : ac$

$= ax + ab : ac$

$= x + b : c$

II. $x^2 + bx = cy.$

$ax = y^2$ | $ax = y^2$
$x^2 + bx = cy$ | $x^2 + bx = cy$

III. $ax - x^2 - bx = y^2 - cy$. IV. $ax + x^2 + bx = y^2. + cy$

Ferner $x^2 + bx = cy$ $\quad y^3 + aby = a^2c$

Das ist $x^2 + \frac{by^2}{a} = cy$ $\quad axy + aby = a^2c$

V. $y^2 + \frac{ax^2}{b} = \frac{acy}{b}$ VI. $xy + by = ac.$

Solchergestalt findet man

I. $y^2 - ax = o$ an der Parabel.

II. $x^2 + bx - cy = o$ an der äussern Parabel.

III. $y^2 + x^2 - cy + bx - ax = o$ an dem Circul.

IV. $y^2 - x^2 + cy - ax - bx = o$ an der Hyperbel.

V. $y^2 + \frac{ax^2}{b} - \frac{acy}{b} = o$ an der Ellipsi.

VI. $xy + by - ac = o$ an der Hyperbel zwischen ihren Asymptoten.

Weil

Weil sich der Circul am leichtesten beschreiben läßt; so kan man ihn mit einem von den übrigen fünf Oertern beschreiben, und dadurch den Werth von y finden.

Tab. VII. Fig. 56.

Beschreibet demnach mit dem Parameter a eine Parabel (§. 220); so ist in ihr eine jede Absciße $DP = x$, eine jede Semiordinate aber $PM = y$ (§. 217).

Für den Circul ist (§. 362).

$$2r = 0 \qquad -2n = -c \qquad -2p = b - a$$

$$\frac{\quad}{q} \qquad n = \tfrac{1}{2}c \qquad p = \frac{a - b}{2}$$

$$r = 0,\ q = s$$

$$n^2 + p^2 = m^2$$

das ist $\frac{1}{4}c^2 + (\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b)^2 = m^2$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}c^2 + (\tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}b)^2)} = m.$$

Fig. 57.

Derowegen traget auf eine gerade Linie AB aus C in K $\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$. und richtet in K die Linie $KD = \frac{1}{2}c$ perpendicular auf; so ist CD der Radius des Circuls DAMB. Wenn ihr selbigen beschrieben habt; so ziehet DP mit AB parallel, und ihr habt $DP = x$, $PM = y$.

Fig. 56, 57.

Nun siehet man leicht, wie der Circul mit der Parabel zu vereinigen sey, damit die Linien DP und PM auf einander fallen. Richtet nemlich in D die Linie $DK = \frac{1}{2}c$ perpendicular auf; ziehet KQ mit DP parallel, und machet $KC = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$. Endlich beschreibet mit CD durch

durch den Scheitel-Punct D den Circul; so ist $PM = y$.

Denn $DP = KQ = \frac{y^2}{a}$ (§. 222), und daher $CQ = KQ - KC = \frac{y^2}{a} - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$. Ferner ist $QM = PM - DK = y - \frac{1}{2}c$, folglich:

$$QC^2 = \frac{y^4}{a^2} - y^2 + \frac{1}{4}a^2 + \frac{by^2}{a} - \frac{ab}{2} + \frac{1}{4}bb$$

$$QM^2 = y^2 - cy + \frac{1}{4}cc$$

$$CM = \frac{y^4}{a^2} + \frac{by^2}{a} - cy + \frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{4}a^2 - \frac{ab}{2} + \frac{1}{4}b^2$$

$$CM^2 = DC^2 = \frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}b^2 \quad \textit{subtr.}$$

$$\frac{y^4}{a^2} + \frac{by^2}{a} - cy = 0$$

$$y : a^2$$

$$y^3 + aby - a^2c = 0.$$

Auf eben solche Art kan man die Oerter an der Ellipsi und der Hyperbel beschreiben, und den Circul darauf tragen, damit man den Werth von y findet: welches in folgenden Aufgaben durch wahre Exempel soll erkläret werden.

Es sey die vorgegebene Gleichung $y^4 + 2by^3 + a^2cy = a^3d$. Weil $y^4 + 2by^3 = a^3d - a^2cy$; so ist

$a^2 : y^2 = y^2 + 2by : ad - cy.$

Setzet: $a : y = b + y : x$

so ist I. $ax = by + y^2$

$ax - by = y^2$

daher $a^2 : ax - by = ax + by : ad - cy$

II. $a^3d - a^2cy = a^2x^2 - b^2y^2.$

Setzet ferner für y^2 seinen Werth $ax - by$; so ist

$a^3d - a^2cy = a^2x^2 - ab^2x + b^3y$ a^2

folglich III. $ad - cy - \frac{b^3y}{a^2} = x^2 - \frac{b^2x}{a}$

$y^2 + by = ax$

IV. $y^2 + by + ad - cy - \frac{b^3y}{a^2} = x^2 + ax - \frac{b^2x}{a}$

V. $y^2 + by - ad + cy + \frac{b^3y}{a^2} = ax - x^2 + \frac{b^2x}{a}.$

Solchergestalt findet man

I. $y^2 + by - ax = o$ an der Parabel.

II. $y^2 - \frac{a^2x^2}{b^2} - \frac{a^2cy}{b^2} + \frac{a^3d}{b^2} = o$ an der Hyperbel.

III. $x^2 - \frac{b^2x}{a} + cy - ad = o$ an der äussern Parabel.
$+ \frac{b^3y}{a^2}$

$$\begin{array}{l} \text{IV. } y^2 - x^2 - \frac{b^3y}{a^2} + \frac{b^2x}{a} + ad = 0 \\ \qquad\qquad\;\; + by - ax \\ \qquad\qquad\;\; - cy \end{array}$$
an der gleichseitigen Hyperbel.

$$\begin{array}{l} \text{V. } y^2 + x^2 + \frac{b^3y}{a^2} - \frac{b^2x}{a} - ad = 0 \\ \qquad\qquad + by - ax \\ \qquad\qquad + cy \end{array}$$
an dem Circul.

Wenn man nun alle diese Oerter (§. 360, 362 363) beschreibt, und die an den Kegel-Schnitten mit dem an dem Circul, wie vorhin, verknüpfet; so hat man der gegebenen Gleichung auf fünferley Art ein Genügen gethan.

Anmerckung.

367. Ich halte es für rathsamer, daß ich die vornehmsten Fälle, welche vorkommen können, durch wahre Exempel erläutere.

Die 136. Aufgabe.

368. **Zwischen zwo gegebenen Linien zwo stets mittlere proportional-Linien zufinden.**

Auflösung.

Tab. VII. Fig. 58.

Es sey die kleinere $= a$, von den gesuchten die grössere $= b$, die kleinere $= y$, die grössere $= x$;

so ist

$$\frac{a : y = y : x}{\text{I. } ax = y^2} \qquad \frac{y : x = x : b}{\text{II. } by = x^2}$$

$a : y$

$$\frac{a:y = x:b}{\text{III. } ab = xy}$$
$$ax = y^2$$
$$\frac{x^2 = by}{\text{V. } x^2 + ax = y^2 + by}$$

$$\frac{y^2 = ax}{\text{IV. } by - y^2 = x^2 - ax}$$
$$\frac{x^2 = by}{\tfrac{1}{2}x^2 = \tfrac{1}{2}by} \; 2$$
$$\frac{ax = y^2}{\text{VI. } \tfrac{1}{2}x^2 + ax = \tfrac{1}{2}by + y^2}$$
$$\text{VII. } ax - \tfrac{1}{2}x^2 = y^2 - \tfrac{1}{2}by.$$

Solchergestalt bekommt man folgende Oerter:

I. $y^2 - ax = o$ an der Parabel.
II. $x^2 - by = o$ an der äussern Parabel.
III. $xy - ab = o$ an der Hyperbel zwischen den Asymptoten.
IV. $y^2 + x^2 - by - ax = o$ an dem Circul.
V. $y^2 - x^2 + by - ax = o$ an der gleichseitigen Hyperbel.
VI. $y^2 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}by - ax = o$ an der ungleichseitigen Hyperbel.
VII. $y^2 + \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}by - ax = o$ an der Ellipsi.

I. Wenn man demnach mit dem Parameter a eine Parabel DCM beschreibt; so ist der erste Ort beschrieben, und DQ$=x$, QM$=y$. Tab. VII. Fig. 59.

Für den Circul ist (§. 362)

$$\frac{-2r = 0}{\frac{q}{r=0, q=f}} \qquad \frac{-2n = -b}{n = \tfrac{1}{2}b} \qquad \frac{-2p = -an^2 + p^2 = m^2}{p = \tfrac{1}{2}a \sqrt{(\tfrac{1}{4}b^2 + \tfrac{1}{4}a^2)} = m}$$

Tra-

Tab. VII. Fig. 60. Traget also auf eine gerade Linie BG aus C in K $\frac{1}{2}a$, richtet in K den Perpendicul KD $=\frac{1}{2}b$ auf; so ist CD $=\surd(\frac{1}{4}b^2+\frac{1}{4}a^2)$ der Radius des Circuls DBMG, und darinnen DQ $=x$, QM $=y$.

Tab. VII. Fig. 59. Weil nun der Punct D in den Scheitel-Punct der Parabel fällt; so richtet auf der Axe DQ die Linie DK $=\frac{1}{2}b$ perpendicular auf, ziehet aus K die Linie KG mit DQ parallel, machet KC $=\frac{1}{2}a$, und beschreibet aus C durch D den Circul DBMG; so ist DQ $=x$, und QM $=y$ in dem gegebenen Falle.

Wenn man in der Gleichung $xy=ab$ vor x seinen Werth $y^2:a$ aus der Gleichung $ax=y^2$ setzet: so bekommt man $y^3=a^2b$, oder $y^3-a^2b=0$. Und diese Gleichung dienet zu erweisen, daß die Linie y recht gefunden worden sey. Denn, weil DK $=\frac{1}{2}b$, und KC $=\frac{1}{2}a$; so ist DC$^2=\frac{1}{4}aa+\frac{1}{4}bb$ (§. *172 Geom.*). Wiederum, weil QM $=y$, und der Parameter von der Parabel $=a$; so ist DQ $=$ KP $=y^2:a$ (§. 222), und daher CP $=y^2:a-\frac{1}{2}a$, hingegen PM $=y-\frac{1}{2}b$, folglich:

$$CP^2=\frac{y^4}{a^2}-y^2+\tfrac{1}{4}aa$$

$$PM^2=y^2-by+\tfrac{1}{4}bb$$

$$CM^2=\frac{y^4}{a^2}-by+\tfrac{1}{4}aa+\tfrac{1}{4}bb,$$

CM^2

$$CM^2 = CD^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2$$

$$y^4 - by = o$$
$$\overline{a^2}$$
$$\overline{\qquad\qquad} \; y : a^2$$
$$y^3 - a^2 b = o.$$

II. Für die Ellipsin ist (§. 361)

$$-2r = o \qquad t = \frac{1}{2} \qquad -2n = \frac{1}{2}b$$
$$\overline{q} \qquad \overline{2m} \qquad \overline{n = \frac{1}{4}b}$$
$$r - o\,q = \int \qquad \overline{t : 2m = 1 : 2}$$
$$-2tp = -a \qquad n^2 - tm^2 + tp^2 = o$$
$$\overline{2m} \qquad \overline{2m} \quad \overline{2m}$$
$$p = a \qquad \frac{1}{16}b^2 - \frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{2}a^2 = o$$
$$\frac{1}{16}b^2 + \frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{2}m^2$$
$$\overline{\qquad\qquad} \; 2$$
$$\frac{1}{8}b^2 + a^2 = m^2$$
$$\sqrt{(\frac{1}{8}b^2 + a^2)} = m = t.$$

Demnach ist die halbe kleine Axe $= \sqrt{(\frac{1}{16}b^2 + \frac{1}{2}a^2)}$ (248).

Machet BC $= a$, und richtet AB $= \frac{1}{4}b$ darauf perpendicular auf; so ist AC $= \sqrt{(\frac{1}{16}b^2 + a^2)}$. Richtet ferner auf AC die Linie AD $= \frac{1}{4}b$ perpendicular auf; so ist DC $= \sqrt{(\frac{1}{8}b^2 + a^2)}$, das ist, die halbe große Axe. Tab. VII. Fig. 61.

Tab. VII. Fig. 62.

Gleichergestalt richtet auf EF $=\frac{1}{4}b$, EG $=\frac{1}{2}a$ perpendicular auf; so ist GF $=\sqrt{(\frac{1}{16}b^2+\frac{1}{4}a^2)}$. Richtet ferner GH $=\frac{1}{2}a$ auf GF perpendicular auf; so ist FH $=\sqrt{(\frac{1}{16}b^2+\frac{1}{2}a^2)}$, das ist, die halbe kleine Axe.

Tab. VII. Fig. 63.

Traget nun auf die Linie AB aus A in E und aus E in B die halbe große Axe: ziehet durch E die Linie HI auf AB perpendicular, und machet EH und EI der halben kleinen Axe gleich: so könnet ihr (§. 257) die Ellipsin AHBI beschreiben. Machet ferner EL $=a$, und ziehet LD=KL$=\frac{1}{4}b$ auf AB perpendicular, hingegen KG und DF mit AB parallel. Endlich traget auf KG aus K in C $\frac{1}{2}a$, und beschreibet aus C durch D einen Circul; so ist abermal DQ $=x$ und QM $=y$. Denn weil PM $=y-\frac{1}{4}b$; so ist PM$^2=y^2-\frac{1}{2}by+\frac{1}{16}b^2$. Wiederum, weil EP $=x-a$, AE $=\sqrt{(\frac{1}{8}b^2+a^2)}=m$, folglich AP $=m+x-a$, und PB $=m-x+a$; so ist AP.PB $=m^2+2ax-x^2-a^2=\frac{1}{8}b^2+2ax-x^2$. Derowegen, da AP.PB:PM$^2=2m:t=2:1$ (§. 239); so ist

$$\frac{2y^2-by+\frac{1}{8}b^2=\frac{1}{8}b^2+2ax-x^2}{y^2-\frac{1}{2}by=ax-\frac{1}{2}x^2.}$$

In dem Circul wird gefunden $y^2-by=ax-x^2$. Wenn ihr diese beyden Gleichungen von einander abziehet; so bleibt übrig $-\frac{1}{2}by=-\frac{1}{2}x^2$. Demnach ist $by=x^2$, folglich $y:x=x:b$. Wenn ihr ferner für x in der

der Gleichung für den Circul by setzet; so bekommet ihr $y^2 = ax$, folglich $a : y = y : x$. Und solchergestalt sind die Linien DQ und QM richtig gefunden worden.

III. Für die gleichseitige Hyperbel ist (§. 363)

$$\frac{2r = o}{q} \quad \frac{-t = -1}{2m} \quad \frac{-2n = b}{n = -\frac{1}{2}b} \quad \frac{2p = -a}{p = -\frac{1}{2}a}$$

$$r = o \; q = \int, \; t = 2m$$

$$n^2 + m^2 - p^2 = o$$

$$m^2 = p^2 - n^2 = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}b^2$$

$$m = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}b^2)}.$$

Tab. VII. Fig. 60.

Weil $\frac{1}{4}b^2$ von $\frac{1}{4}a^2$ abgezogen werden muß; so müsset ihr hier für b die kleinere und für a die grössere Linie annehmen, und solches auch bey dem Circul beobachten, daß nemlich die Linien CK und KD mit einander verwechselt werden. Wenn ihr dieses in acht nehmet; so könnet ihr die verlangten Linien vermittelst der Hyperbel folgendergestalt finden. Ueber AB $= \frac{1}{2}b$ beschreibet einen halben Circul. Darein traget BC $= \frac{1}{2}a$; so ist AC $= \sqrt{(\frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{4}a^2)}$, oder, wenn a die grössere, b die kleinere heissen solte, $\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - {}_4b^2)}$, das ist, die halbe Axe.

Tab. VII. Fig. 64.

Tab. VII. Fig. 65, 60. Traget nun auf eine gerade Linie aus G in A und B die halbe Axe, richtet in A die Linie AI = AG perpendicular auf, und beschreibet aus dem mittel-Puncte G durch I einen halben Circul FIf; so sind in F und f die brenn-Puncte (§. 265), und ihr könnet die Hyperbel (§. 271) beschreiben. Wenn dieses geschehen ist, so machet EG $= \frac{1}{2}b$, richtet in E die perpendicular-Linie EK auf, und machet ED = DK $= \frac{1}{2}a$. Ziehet durch D und K die Linien DQ und KP mit der Axe AL parallel. Traget aus K in C $\frac{1}{2}b$, und beschreibet aus C durch D einen Circul. Endlich ziehet aus M die halbe Ordinate LM; so ist DQ $= x$, QM $= y$.

Denn LM $= y + \frac{1}{2}a$, EA = GE − AG $= \frac{1}{2}b - \surd(\frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{4}a^2)$, oder EA $= \frac{1}{2}b - m$, und daher AL = EA + EL $= x + \frac{1}{2}b - m$, BL $= x + \frac{1}{2}b + m$. Also ist LM$^2 = y^2 + ay + \frac{1}{4}a^2$, und AL.LB $= x^2 + bx + \frac{1}{4}b^2 - m^2 = x^2 + bx + \frac{1}{4}a^2$. Also ist

$$y^2 + ay + \tfrac{1}{4}a^2 = x^2 + bx + \tfrac{1}{4}a^2 \text{ (§. 290).}$$

$$y^2 + ay = x^2 + bx$$

Im Circul $y^2 - ay = bx - x^2$ *Subtr.*

demnach $2ay = 2x^2$

$$ay = x^2$$

folglich $y : x = x : a$.

Setzet ferner in der Gleichung für den Circul ay für x^2; so bekommet ihr

$$\underline{y^2 - ay = bx - ay}$$

das ist $\underline{y^2 = bx}$

folglich $b : y = y : x$.

IV. Auf eben diese Art kan man durch die ungleichseitige Hyperbel der Aufgabe ein Genügen thun. Wollet ihr aber

V. Die Hyperbel zwischen ihren Asymptoten gebrauchen; so richtet HD auf DI perpendicular auf, machet DE $= a$, und EL $= b$; theilet EL in zween gleiche Theile in N, oder machet DK $= \frac{1}{2}b$, und ziehet KN mit DE parallel. Traget aus K in C $\frac{1}{2}a$, und beschreibet aus C durch D den Circul DELM. Endlich beschreibet auch durch L die Hyperbel TMLS, und aus M, wo sie den Circul durchschneidet, ziehet QM mit DH, oder auch PM mit DQ parallel; so ist DQ $=$ PM $= x$, DP $=$ QM $= y$. Denn vermöge der Hyperbel ist (§. 282).

Tab. VII. Fig. 66, 60.

$$DE : DP = PM : EL$$
$$a : y = x : b$$

daher $y - a : a = b - x : x$

und $y - a : b - x = a : x$ (§. 142).

Vermöge des Circuls ist $y^2 - ay = bx - x^2$, und daher

$$y - a : b - x = x : y$$

daher $a : x = x : y$.

Es ist aber auch $a : x = y : b$.

Derowegen $x : y = y : b$.

Zusatz.

369. Wenn die Seite eines Würfels a ist, die Seite des doppelten Würfels $= y$; so ist $2a^3 = y^3$, oder, wenn $2a = b$, $a^2 b = y^3$. Also muß man zwischen der Seite des Würfels und der doppelten Seite zwo mittlere proportional-Linien suchen; so ist die erstere davon die Seite des doppelten Würfels.

Die 137. Aufgabe.

Tab. VIII. Fig. 67.

370. **Eine gerade Linie AB, welche nach Belieben in C getheilet worden ist, noch ferner in D dergestalt zutheilen, daß $CD : DB = AC^2 : CD^2$.**

Auflösung.

Es sey $AC = a$, $CB = b$, $CD = y$; so ist $DB = b - y$, folglich, weil $CD : DB = AC^2 : CD^2$,

$$y : b - y = a^2 : y^2$$

Setzet $a : y = y : x$

so ist I. $y^2 = ax$

und $y : b - y = a : ax$

$= a : x$ (§. 142)

II. $xy = ab - ay$

Fer-

Ferner $y^2 : by - y^2 = a : x$ (§. 142)

$ax : by - y^2 = a : x$

$x : by - y^2 = 1 : x$

III. $x^2 = by - y^2$

$ax = y^2$

IV. $x^2 + ax = by$

$ax = y^2$

V. $x^2 + 2ax = y^2 + by$

und $x^2 = by - y^2$

$ax = y^2$

VI. $ax - x^2 = 2y^2 - by$.

Also bekommt man Gleichungen an folgenden Oertern, nemlich

I. $y^2 - ax = 0$ an der Parabel.

II. $xy + ay - ab = 0$ an der Hyperbel zwischen den Asymptoten.

III. $y^2 + x^2 - by = 0$ an dem Circul.

IV. $x^2 + ax - by = 0$ an der äußern Parabel.

V. $y^2 - x^2 + by - 2ax = 0$ an der gleichseitigen Hyperbel.

VI. $y^2 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}by - \frac{1}{2}ax = 0$ an der Ellipsi.

Tab. VIII. Fig. 68. Beschreibet demnach mit dem Parameter a eine Parabel; so ist DQ $= x$, QM $= y$.

Für den Circul ist (§. 362)

$$\frac{2r}{q} = o \qquad -2n = -b \qquad -2p = o$$

$$r = o \quad q = \int \qquad n = \tfrac{1}{2}b \qquad p = o$$

$$n^2 - m^2 + p^2 = o$$

$$n^2 = m^2$$

$$\tfrac{1}{4}b^2 = m^2$$

$$\tfrac{1}{2}b = m.$$

Tab. VIII. Fig. 69. Wenn ihr demnach mit AC $= \frac{1}{2}b$ einen Circul beschreibet, und CD auf AB perpendicular aufrichtet, DL aber mit AB parallel ziehet; so ist ein jedes DQ $= x$, und ein jedes QM $= y$. Denn PM $= y - \frac{1}{2}b$, AP $= \frac{1}{2}b + x$, PB $= \frac{1}{2}b - x$. Daher PM$^2 = y^2 - by + \frac{1}{4}b^2$, und AP.PB $= \frac{1}{4}b^2 - x^2$, folglich

$$y^2 - by + \tfrac{1}{4}b^2 = \tfrac{1}{4}b^2 - x^2$$

$$y^2 - by = -x^2$$

$$y^2 + x^2 - by = o.$$

Tab. VIII. Fig. 68. Damit ihr nun x und y in unserem Falle findet; so setzet den Circul und die Parabel zusammen, dergestalt, daß der Punct D in die

die Scheitel der Parabel, und DL auf ihre Axe fällt. Nemlich richtet in D auf der Axe DR einen Perpendicul $DC = \frac{1}{2}b$ auf, und beschreibet aus C durch D den Circul; so ist $DQ = x$ und $QM = y$ in unserm Falle.

Denn $DQ = CS = y^2 : a$, und $SM = y - \frac{1}{2}b$, $CM = \frac{1}{2}b$. Derowegen, weil $CM^2 = CS^2 + SM^2$, und $CM^2 = \frac{1}{4}b^2$, $CS^2 = y^4 : a^2$, $SM^2 = y^2 - by + \frac{1}{4}b^2$; so ist

$$\frac{1}{4}b^2 = \frac{y^4}{a^2} + y^2 - by + \frac{1}{4}b^2$$

$$\frac{y^4}{a^2} + y^2 - by = 0 \quad | \; a^2$$

$$y^4 + a^2y^2 - a^2by = 0$$

$$y^3 + a^2y - a^2b = 0$$

daher $b - y : y = y^2 : a^2$.

Weil die Gleichung der gegenwärtigen Aufgabe gar wenig unterschieden ist von derjenigen, welche wir oben durch alle Kegel-Schnitte construiret haben (§. 368); so wollen wir die übrigen Kegel-Schnitte übergehen.

Die 138. Aufgabe.

371. **Einen rechtwincklichten Triangel zubeschreiben, von welchem das eine Stück CB von der grösten Seite gegeben** Tab. VIII. Fig. 70.

wird, welches der Perpendicul CD abschneidet, welcher aus dem rechten Winckel D gefället wird, und zwar von der Beschaffenheit, daß die Summe der Quadrate von dem andern Stücke AC und dem Perpendicul CD nebst einem Rectangulo aus dem Perpendicul CD in eine gegebene Linie FG gleich sey dem Rectangulo aus dem Stücke BC in das andere Stück AC und eine gegebene Linie HI.

Auflösung.

Es sey $BC = a$, $FG = b$, $HI = c$, $AC = x$, $CD = y$; so ist

$$CB : DC = DC : AC$$
$$a : y = y : x$$

I. $ax = y^2$

$$AC^2 + CD^2 + CD.FG = BC.(AC + HI)$$
$$x^2 + y^2 + by = ax + ac$$

II. $y^2 + by = ax + ac - x^2$

Daher $ax + by = ax + ac - x^2$

III. $by = ac - x^2$

$$\tfrac{1}{2}by = \tfrac{1}{2}ac - \tfrac{1}{2}x^2$$
$$y^2 + by = ax + ac - x^2$$

IV. $y^2 + \tfrac{3}{2}by = ax + \tfrac{3}{2}ac - \tfrac{3}{2}x^2$

$$y^2 = ax$$

by

$$by = ac - x^2$$

$$\text{V. } y^2 - by = ax - ac + x^2.$$

Wir haben demnach Gleichungen für folgende Oerter:

I. $y^2 - ax = o$ an der Parabel.
II. $y^2 + x^2 + by - ax - ac = o$ an dem Circul.
III. $x^2 + by - ac = o$ an der äußern Parabel.
IV. $y^2 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}by - ax - \frac{3}{2}ac = o$ an der Ellipsi.
V. $y^2 - x^2 - by - ax + ac = o$ an der Hyperbel.

Wenn man in dem Orte an der äußern Parabel $x^2 + by - ac = o$ für x^2 seinen Werth $y^4 : a^2$ setzet; so bekommt man

$$\frac{y^4}{a^2} + by - ac = o$$

daher $y^4 + a^2by - a^3c = o.$

Woraus zu ersehen ist, daß man eine biquadratische Gleichung zu construiren hat.

I. Wenn man mit dem Parameter a eine Parabel beschreibt; so ist der Ort an der Parabel vorhanden.

II. Für den Ort an dem Circul ist

$$2r = o \qquad -2n = b \qquad -2p = -a$$

$$q \qquad n = -\tfrac{1}{2}b \qquad p = \tfrac{1}{2}a$$

$$r = o,\ q = f$$

$$n^2 + p^2 - m^2 = -ac$$

$$n^2 + p^2 + ac = m^2$$

$$\tfrac{1}{4}b^2 + \tfrac{1}{4}a^2 + ac = m^2$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}b^2 + \tfrac{1}{4}a^2 + ac)} = m.$$

Tab. VIII. Fig. 71.

Machet demnach $RI = \frac{1}{2}b$, und richtet in I perpendicular auf $HI = \frac{1}{2}a$; so ist $HR = \sqrt{(\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb)}$. Verlängert RH in L bis $RL = a$, und in O, bis $RO = c$. Beschreibet über OL einen halben Circul; so ist der Perpendicul $CR = \sqrt{ac}$ (§. 210 *Geom.*), folglich $CH = \sqrt{(\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb + ac)}$ der Radius des Circuls. Wenn ihr also aus C mit CH den Circul beschrieben und durch C die Linie AB mit OL parallel gezogen habt; so machet $CK = \frac{1}{2}a$. Richtet in K den Perpendicul $KD = \frac{1}{2}b$ auf, und ziehet die Linie DQ mit AB parallel; so ist der Ort an dem Circul beschrieben, und der Punct D der Ursprung von x, hingegen y wird bis an die Linie DQ gezogen.

Wenn ihr nun ferner damit den Ort in der Parabel verknüpfen, und dadurch x und y in dem gegebenen Falle determiniren wollet; so nehmet DQ für die Axe an, und beschreibet um

um selbige mit dem Parameter a die Parabel. Wo sie den Circul durchschneidet, nemlich aus dem Puncte M, lasset einen Perpendicul QM auf die Linie DQ fallen; so ist DQ $= x$, Qm $= y$. Machet ihr nun QS $= a$, und ziehet die Linien DM und SM; so ist DMS der verlangte Triangel.

Denn DQ=KP=$\frac{y^2}{a}$, und daher CP$\frac{y^2}{a}-\frac{1}{2}a$.

Ferner PM $=$ PQ $+$ QM $= \frac{1}{2}b + y$. Derowegen

$$CP^2 = \frac{y^4}{a^2} - y^2 + \frac{1}{4}a^2$$

$$PM^2 = y^2 + by + \frac{1}{4}bb$$

$$CM^2 = \frac{y^4}{a^2} + by + \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2$$

$$CH^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2 + ac$$

$$\frac{y^4}{a^2} + by - ac = 0 \qquad a^2$$

$$y^4 + a^2by - a^3c = o,$$

welches die biquadratische Gleichung ist, welche man hat construiren sollen.

Wie diese Gleichung durch die übrigen Kegel-Schnitte construiret wird, ist aus der 136. Aufgabe (§. 368) abzunehmen.

Die

Die 139. Aufgabe.

372. **Eine allgemeine Regel zufinden, alle cubischen und biquadratischen Gleichungen zuconstruiren.**

Auflösung.

Tab. VIII. Fig. 72. Es sey MAN eine Parabel, und ihre Axe aO, mit welcher AP parallel, darauf DH perpendicular gezogen ist. Aus H als dem Mittel-Puncte beschreibet durch A den Circul AMN. Nun sey $AD = b$, $DH = d$, $AQ = c$; so ist $AH^2 = dd + bb$. Es sey ferner $PM = x$, der Parameter der Parabel $= a$; so ist $OM = x + c$ und $KM = x + d$. Da nun (§. 233)

$$a : OM + AQ = PM : AP (= QO)$$

$$a : x + 2c = x : \frac{x^2 + 2cx}{a}$$

folglich $DP = HK = \frac{x^2 + 2cx}{a} - b$;

so ist $HK^2 = \frac{x^4}{a^2} + \frac{4cx^3}{a^2} + \frac{4c^2x^2}{a^2} - \frac{2bx^2}{a} - \frac{4bcx}{a} + bb$.

Und weil $KM^2 = x^2 + 2dx + dd$; so ist $\frac{x^4}{a^2} + \frac{4cx^3}{a^2} + \frac{4c^2x^2}{a^2} - \frac{2bx^2}{a} - \frac{4bcx}{a} + bb + x^2$. $+ 2dx + dd = bb + dd$, das ist

x^4

$$\frac{x^4}{a^2} + \frac{4cx^3}{a^2} + \frac{4c^2x^2}{a^2} - \frac{4bcx}{a} = 0$$
$$-\frac{2bx^2}{a} + 2dx$$
$$+ x^2$$

$$\frac{x}{a^2}$$

$$x^3 + 4cx^2 + 4c^2x - 4abc = 0.$$
$$- 2abx + 2a^2d$$
$$+ a^2x$$

Hieraus ist klar, daß, wenn das andere Glied das mehr-Zeichen + hat, die wahren Wurtzeln zur Rechten fallen. Vergleichet demnach mit dieser Gleichung folgende $x^3 + px^2 \pm qx \pm r = 0$; so findet ihr

$c = \frac{1}{4}p$, $4c^2 - 2ab + a^2 = q$	$4c^2 - 2ab + a^2 = -q$
$4c^2 + a^2 - q = 2ab$	$4c^2 + a^2 + q = 2ab$
$\frac{4}{16}p^2 + a^2 - q = 2ab$	$\frac{4}{16}p^2 + a^2 + q = 2ab$
$\frac{p^2}{8a} + \frac{1}{2}a - \frac{q}{2a} = b$	$\frac{p^2}{8a} + \frac{1}{2}a + \frac{q}{2a} = b$
$2a^2d - 4abc = r$	$2a^2d - 4abc = -r$
$2a^2d = 4abc + r$	$2a^2d = 4abc - r$
$d = \frac{2bc}{a} + \frac{r}{2a^2}$	$d = \frac{2bc}{a} - \frac{r}{2a^2}$

das ist

$$d = \tfrac{1}{4}p + \frac{p^3}{16a^2} + \frac{pq}{4a^2} + \frac{r}{2a^2}$$

das ist

$$d = \tfrac{1}{4}p + \frac{p^3}{16a^2} + \frac{pq}{4a^2} - \frac{r}{2a^2}.$$

Setzet nun $PN = x$, und das übrige bleibe wie vorhin; so ist $NR = PN - RP = PN - DH = x - d$, $NO = x - c$, $PM = x - 2c$, $NR^2 = x^2 - 2dx + d^2$, und weil (§. 233)

$$a : ON + AQ = PM : AP$$

$$a : x = x - 2c : \frac{x^2 - 2xc}{a}$$

auch daher $DP = HR = \frac{x^2 - 2cx}{a} - b$, demnach

$$HR^2 = \frac{x^4}{a^2} - \frac{4cx^3}{a^2} + \frac{4c^2x^2}{a^2} - \frac{2bx^2}{a} + \frac{4bcx}{a} + b^2;$$

folglich, da $HN^2 = HR^2 + NR^2$ (§. 172 *Geom.*),

$$\frac{x^4}{a^2} - \frac{4cx^3}{a^2} + \frac{4c^2x^2}{a^2} - \frac{2bx^2}{a} + \frac{4bcx}{a} + b^2 + x^2$$

$$- 2dx + dd = bb + dd$$

$$\frac{x^4}{a^2} - \frac{4cx^3}{a^2} + \frac{4c^2x^2}{a^2} + \frac{4bcx}{a} = 0$$

$$- \frac{2bx^2}{a} - 2dx$$

$$+ x^2$$

$$\frac{x}{a^2}$$

x^3 —

$$
\begin{aligned}
x^3 - 4cx^2 + 4c^2x &+ 4abc = 0\\
-2abx &- 2a^2d\\
+a^2x.&
\end{aligned}
$$

Hieraus erhellet, daß, wenn das andere Glied das minder-Zeichen — hat, die wahren Wurzeln zur Lincken fallen. Man vergleiche demnach mit der gefundenen Gleichung folgende, $x^3 - px^2 \pm qx \pm r = 0$; so ist

$$-p = -4c,\quad 4c^2 - 2ab + a^2 = q,\quad 4c^2 - 2ab + a^2 = -q$$

$$\tfrac{1}{4}p = c \qquad \tfrac{4}{16}p^2 + a^2 - q = 2ab \qquad \tfrac{4}{16}p^2 + a^2 + q = 2ab$$

$$\frac{p^2}{8a} + \tfrac{1}{2}a - \frac{q}{2a} = b \qquad \frac{p^2}{8a} + \tfrac{1}{2}a + \frac{q}{2a} = b$$

$$4abc - 2a^2d = r \qquad 4abc - 2a^2d = -r$$

$$4abc - r = 2a^2d \qquad 4abc + r = 2a^2d$$

$$\frac{2bc}{a} - \frac{r}{2a^2} = d \qquad \frac{2bc}{a} + \frac{r}{2a^2} = d$$

$$\tfrac{1}{4}p + \frac{p^3}{16a^2} + \frac{pq}{4a^2} - \frac{r}{2a^2} = d,\quad \tfrac{1}{4}p + \frac{p^3}{16a^2} + \frac{pq}{4a^2} + \frac{r}{2a^2} = d.$$

Also ist in allen vollständigen cubischen Gleichungen

$$AQ = \tfrac{1}{4}p$$

$$DA = \tfrac{1}{2}a + \frac{p^2}{8a} + \frac{q}{2a}$$

$$DH = \tfrac{1}{4}p + \frac{p^3}{16a^2} \mp \frac{pq}{4a^2} \mp \frac{r}{2a^2}.$$

Nemlich q hat allezeit in der Regel —, wenn es in der Gleichung + hat, und hingegen +, wenn hier — ist. Hingegen ist beständig $+r$, ausser, wenn in der Gleichung p und r verschiedene Zeichen haben.

Wenn einige Glieder in der Gleichung fehlen; so müssen auch aus der Gleichung alle weggelassen werden, in welchen die dazu gehörigen Buchstaben zu finden sind. Z. E. Wenn das andere Glied fehlet; so ist $\tfrac{1}{4}p = 0$, und daher $DA = \tfrac{1}{2}a \mp \frac{q}{2a}$, und $DH = \frac{r}{2a^2}$.

Wenn ihr das Quadrat von dem Radio des Circuls HM oder HN setzet $bb + dd \mp af$; so läßt sich die Gleichung auf keine cubische bringen, sondern sie bleibt biquadratisch. Wenn ihr nun damit die Gleichung $x^4 \mp px^3 \mp qx^2 \mp rx \mp ſ = 0$ vergleichet; so bleibt alles, wie vorhin: nur wird gefunden

$ſ = a^3 f$, und daher $ſ : a^3 = f$.

Solchergestalt werden die biquadratischen Gleichungen durch eben diese Regel construiret; nur daß der Radius des Circuls ($= \sqrt{(bb + dd \mp af)}$) anders gefunden wird, wie bereits in einem Exempel in der vorhergehenden Aufgabe (§. 371) gezeigt worden ist.

An-

Anmerckung.

373. Diese Regel nennet man insgemein die Backerische central-Regel, weil sie Thomas Backer, ein Engelländer, gefunden hat. Ich halte es vor dienlich, ihren Gebrauch durch folgende Aufgabe zuerläutern.

Die 140. Aufgabe.

374. **In einem rechtwincklichten Triangel ABC wird gegeben das Stück von der Hypothenuse BD und das von der Grund-Linie EC nebst dem Perpendicul AB: man soll die Seiten BC und AC finden.**

Tab. VIII. Fig. 73.

Auflösung.

Es sey $AB = a$ $\quad DC = x$
$BD = b$ $\quad AE = y$
$EC = c$ so ist $BC = b + x$
$AC = c + y$.

$$CD : DB = CE : EA$$
$$x : b = c : y$$
$$xv = bc$$
$$y = bc : x$$
$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$
$$b^2 + 2bx + x^2 = a^2 + c^2 + 2cy + y^2$$
$$= a^2 + c^2 + \frac{2bc^2}{x} + \frac{b^2c^2}{x^2}$$
$$b^2x^2 + 2bx^3 + x^4 = a^2x^2 + c^2x^2 + 2bc^2x + b^2c^2$$

Das ist, $x^4 + 2bx^3 + b^2x^2 - 2bc^2x - b^2c^2 = 0$.
$\qquad - a^2x^2$
$\qquad - c^2x^2$

Nehmet a für den Parameter an, und beschreibet eine Parabel. Weil

$p=2b$, $q=b^2-a^2-c^2$, $r=-2bc^2$, $s=-b^2c^2$; so ist in der Backerischen central-Regel

Tab. VIII. Fig. 72.

$$AQ=\tfrac{1}{2}b,\quad DA=\tfrac{1}{2}a+\frac{4b^2}{8a}-\frac{b^2}{2a}+\tfrac{1}{2}a+\frac{c^2}{2a}$$

$$=a+\frac{c^2}{2a}$$

$$DH=\tfrac{1}{2}b+\frac{8b^3}{16a^2}-\frac{2b^3}{4a^2}+\frac{2a^2b}{4a^2}+\frac{2bc^2}{4a^2}-\frac{2bc^2}{2a^2}$$

$$=b-\frac{bc^2}{2a^2}.$$

Tab. VIII. Fig. 74.

Beschreibet demnach mit dem Parameter a eine Parabel, machet $aQ=\tfrac{1}{2}b$, und in der Linie QP, welche mit der Axe parallel gezogen ist, $AD=a+\frac{c^2}{2a}$ die perpendicular-Linie $DH=b-\frac{bc^2}{2a^2}$. Wie die Linien $c^2:2a$ und $bc^2:2a^2$ gefunden werden, ist aus den oben gefundenen Werthen von dergleichen Linien klar: nemlich $c^2:2a$ ist die halbe dritte proportional-Linie zu a und c, hingegen $bc^2:2a^2$ ist die vierte zu a, b und $c^2:2a$. Durch H und A ziehet die Linie CB, und machet $AB=a$,

AC

$AC = b^2c^2 : a^3$, welches die vierte proportional-Linie zu a, b und $bc^2 : a^2$ ist. Ueber CB beschreibet einen halben Circul, und richtet aus A den Perpendicul AE auf. Endlich beschreibet aus H mit HE einen Circul, welcher die Parabel in M durchschneidet; so ist $PM = x$.

Denn $AD^2 = a^2 + c^2 + \frac{c^4}{4a^2}$

$$DH^2 = b^2 - \frac{b^2c^2}{a^2} + \frac{b^2c^4}{4a^4}$$

$$AH^2 = a^2 + b^2 + c^2 + \frac{c^4}{4a^2} - \frac{b^2c^2}{a^2} + \frac{b^2c^4}{4a^4}$$

$$EH^2 = a^2 + b^2 + c^2 + \frac{c^4}{4a^2} + \frac{b^2c^4}{4a^4}$$

Ferner ist (§. 233)

$$a : OM + aQ = PM : PA$$

$$a : x + b = x : \frac{x^2 + bx}{a}$$

daher $DP = HR = \frac{x^2 + bx}{a} - a - \frac{c^2}{2a}$

und weil $RM = x + b - \frac{bc^2}{2a^2}$, so ist

$$RM^2 = x^2 + 2bx + bb - \frac{bc^2x}{a^2} - \frac{b^2c^2}{a^2} + \frac{b^2c^4}{4a^4}$$

$$HR^2 = \frac{x^4}{a^2} + \frac{2bx^3}{a^2} + \frac{b^2x^2}{a^2} - 2x^2 - 2bx + \frac{a^3 - c^2x}{a}$$
$$- \frac{bc^2x}{a^2} + c^2 + \frac{c^4}{4a^2}$$

Wenn man nun von der Summe dieser beyden Quadrate das Quadrat von EH abziehet; so bleibt

$$\frac{x^4}{a^2} + \frac{2bx^3}{a^2} + \frac{b^2x^2}{a^2} - \frac{2bc^2x}{a^2} - \frac{b^2c^2}{a^2} = 0$$
$$- x^2$$
$$- \frac{c^2x^2}{a^2}$$

übrig, und demnach ist

$$x^4 + 2bx^3 + b^2x^2 - 2bc^2x - b^2c^2 = 0$$
$$- a^2x^2$$
$$- c^2x^2.$$

Ende des ersten Theils.



Der

Der andere Theil, von den Anfangs-Gründen der Differential-Rechnung.

Die 1. Erklärung.

1. Die Differential-Rechnung ist eine Wissenschaft, aus einer gegebenen endlichen Grösse eine unendlich kleine zufinden, deren unendliche zusammen genommen, ihr gleich werden.

Anmerckung.

2. Der Herr Geheime Rath von Leibnitz hat diese Rechnung gefunden. Es ist aber der tiefsinnige Geometra, *Isaac Newton*, in Engelland auf eben dergleichen Gedancken gekommen, wiewol er eine andere Manier hat, die unendlich kleinen Grössen zubezeichnen, und auch die Rechnung selbst mit einem andern Namen nennet, nemlich Methodum Fluxionum.

Die 2. Erklärung.

3. Eine unendlich kleine Grösse ist diejenige, welche so ein geringer Theil von der andern ist, daß er mit ihr nicht verglichen werden kan.

Der 1. Zusatz.

4. Dannenhero ist sie, in Ansehung derjenigen Grösse, mit welcher sie nicht verglichen werden kan, für nichts zuhalten.

Der 2. Zusatz.

5. Folglich, wenn eine unendlich kleine Grösse zu einer andern addirt, oder von ihr subtrahirt wird; so ist in dem erstern Falle die Summe, in dem andern die Differentz der gegebenen gleich zuachten, das ist, eine unendlich kleine Grösse kan eine endliche weder vermehren noch vermindern.

Die 1. Anmerckung.

6. Mercket aber wohl, daß eine unendlich kleine Grösse nur in Ansehung einer andern für nichts zuachten; an sich aber wol etwas ist. Denn bildet euch ein, ihr wollet die Höhe eines Berges messen, und indem ihr über der Arbeit begriffen wäret, jagte der Wind ein Körnlein Sand von der Spitze weg. So wäre der Berg um den Diameter eines Sand-Körnleins niedriger geworden. Allein, da die Ausmessung der Höhe eines Berges so beschaffen ist, daß die Höhe einerley gefunden wird, ob das Sand-Körnlein liegen bleibt, oder von dem Winde weggejagt wird: so kan man dasselbe, in Ansehung eines grossen Berges, für nichts, und also seine Grösse, in Ansehung der Höhe des Berges, für unendlich klein halten. Dieses hat man schon längst überall in acht genommen, wo man die Geometrie bey cörperlichen Dingen in der Natur anbringt. Also setzen wir in der Astronomie, der Diameter der Erde sey, in Ansehung der Weite von der Sonne, und noch mehr der Fixsterne, für einen Punct, oder unendlich klein zuhalten, weil die erste Bewegung der

Sterne

Sterne sich eben so verhalten würde, wenn die Erde würcklich ein untheilbarer Punct wäre. So halten wir in den Mond-Finsternissen die Erde für eine vollkommene Kugel, und also die Höhen der Berge, in Ansehung des Diameters der Erde, für unendlich klein, oder für nichts; weil der Schatten der Erde sich auf dem Monde nicht anders darstellen würde, wenn die Berge gleich nicht da wären, und die Erde die völlige Gestalt einer Kugel hätte. Da man nun auch in der Geometrie großen Vortheil davon hat, wenn man die Grössen in unendlich kleine Theile in Gedancken theilet, das ist, in so kleine, welche, in Ansehung ihrer, für nichts zu halten sind, indem man daraus die endlichen Grössen öfters determiniren, und ihre verborgene Eigenschaften auf die allerleichteste Manier finden kan: wer will es den Geometris verdencken, daß sie dergleichen vornehmen?

Die 2. Anmerckung.

7. Ihr wisset aus der gemeinen Geometrie, daß eine Linie beschrieben wird, wenn ein Punct sich durch einen gewissen Raum bewegt; eine Fläche, wenn eine Linie; ein Cörper, wenn eine Fläche sich bewegt. Also erwachsen die Grössen, indem unendlich viele kleine Theile nach einander anwachsen. Und in dieser Absicht nennet sie *Newton* Fluxionen oder Fluxiones.

Die 3. Erklärung.

8. Wenn die unendlich kleinen Grössen als der Unterscheid zwoer endlichen angesehen werden, so nennet man sie Differential-Grössen.

Die 4. Erklärung.

9. Differentiiren heißt, die differential-Grösse von einer gegebenen endlichen finden.

Die 5. Erklärung.

10. Die Grössen, welche immer wachsen, oder abnehmen, indem andere unverändert bleiben, heissen veränderliche; die andern aber unveränderliche Grössen. Also sind in einer Parabel die Abscissen und Semiordinaten veränderliche Grössen, der Parameter aber ist eine unveränderliche. Denn indem jene beyden beständig wachsen, bleibt dieser unverändert (§. 217 *P. I.*).

Zusatz.

11. Da nun die differential-Grössen die unendlich kleinen Theile sind, welche nach und nach anwachsen, indem sie erzeuget werden (§. 7, 8); so haben die unveränderlichen Grössen keine differential-Grösse.

Der 1. willkührliche Satz.

12. Nennet die veränderlichen Grössen mit den letzten Buchstaben des Alphabets, x, y, z; die unveränderlichen aber mit den ersten, a, b, c.

Der 2. willkührliche Satz.

13. Die differential-Grösse von x nennet dx, die von y nennet dy, und so weiter.

Der 1. Zusatz.

14. Also ist da, oder db, oder $dc = 0$ (§. 11).

Der

Der 2. Zusatz.

15. Und die differential-Grösse von $x + y - a$ ist $dx + dy$; die von $x - y + a$ aber $dx - dy$. Demnach ist es leicht, die Grössen, welche zu einander addiret, oder von einander subtrahiret sind, zu differentiiren.

Die 1. Aufgabe.

16. *Zwo Grössen, welche einander multipliciren, als xy, zu differentiiren.*

Auflösung.

1. Multipliciret die differential-Grösse der einen veränderlichen Grösse in die andere veränderliche Grösse.
2. Die beyden Producte addiret zusammen, so kommt die differential-Grösse von xy heraus, $xdy + ydx$.

Beweiß.

Lasset x und y um ihre halbe differential-Grösse vermehret und vermindert werden, so kommt in dem erstern Falle $x - \frac{1}{2}dx$ und $y - \frac{1}{2}dy$, in dem andern Falle $y + \frac{1}{2}dy$ und $x + \frac{1}{2}dx$. Multipliciret beyde durch einander in beyden Fällen, so bekommet ihr $xy - \frac{1}{2}ydx - \frac{1}{2}xdy + \frac{1}{4}dxdy$ und $xy + \frac{1}{2}ydx + \frac{1}{2}xdy + \frac{1}{4}dxdy$. Wenn ihr beyde Producte von einander abziehet, so bleibt für die differential-Grösse des Rectanguli xy übrig $xdy + ydx$. W. Z. E. W.

Der

Der 1. Zusatz.

17. Wenn viele Grössen einander multipliciren, so dürfet ihr nur zwo oder mehrere nach einander als eine ansehen, und ihr könnet sie nach der gegebenen Regel differentiiren. Z. E. Es sey xyv zudifferentiiren, so ist die differential-Grösse $xydv + xvdy + yvdx$. Denn es sey $xy = t$, so ist $xyv = tv$, folglich $d(xyv) = tdv + vdt$. Nun ist $dt = xdy + ydx$. Derowegen, wenn ihr für t und dt die gehörigen Werthe setzet, so findet ihr $tdv + vdt = xydv + vxdy + vydx$.

Der 2. Zusatz.

18. Dannenhero findet ihr ferner die differential-Grösse einer Potentz, wenn ihr ihren Exponenten um 1 vermindert, und alsdenn die erniedrigte Potentz in ihren unveränderlichen Exponenten und die differential-Grösse der Wurtzel multipliciret. Nemlich $d(x^2) = 2xdx$, $d(x^3) = 3x^2dx$, und überhaupt $d(x^m) = mx^{m-1}dx$.

Der 3. Zusatz.

19. Die differential-Grösse von ay ist $ady + yda$. Nun ist $da = 0$ (§. 14). Derowegen ist $d(ay) = ady$.

Der 4. Zusatz.

20. Weil $\sqrt{x} = x^{1:2}$ und überhaupt $\sqrt[m]{x^n} = x^{n:m}$ (§. 42 *Part. 1.*), so ist die differential-

tial-Grösse von einer irrational-Grösse $(n:m)x^{n:m-1}dx = (n:m)x^{(n-m):m}dx = (n:m)\sqrt[m]{x^{m-n}}dx$.

Der 5. Zusatz.

21. Wiederum, weil $1:x = x^{-1}$, $1:x^2 = x^{-2}$, und überhaupt $1:x^m = x^{-m}$; so ist die differential-Grösse von $1:x$, und $1:x^2$, ingleichen $1:x^m = -x^{-2}dx$, $-2x^{-3}dx$, und $-mx^{-m-1}dx$.

Anmerckung.

22. Daß $1:x = x^{-1}$, $1:x^2 = x^{-2}$, $1:x^3 = x^{-3}$ u.s.w. könnet ihr bald begreifen, wenn ihr nur bedencket, es gehen die Exponenten in einer arithmetischen Verhältniß fort, indem die Dignitäten in einer geometrischen fortschreiten. Nun seyn die Dignitäten $x^2, x, 1, 1:x, 1:x^2, 1:x^3$, so sind die Exponenten $2. 1. 0. -1. -2. -3.$ Und daher ist eben $x^0 = 1$.

Der 6. Zusatz.

23. Endlich, weil $1:\sqrt{x} = 1:x^{1:2} = x^{-1:2}$, $1:\sqrt{x^3} = 1:x^{3:2} = x^{-3:2}$, und überhaupt $1:\sqrt[m]{x^n} = 1:x^{n:m} = x^{-n:m}$; so sind die differential-Grössen von dergleichen Grössen $-\frac{1}{2}x^{-3:2}dx$, $-\frac{3}{2}x^{-5:2}dx$, und überhaupt $-(n:m)x^{-n:m-1}dx = -(n:m)x^{(-n-m):m}dx = \frac{-ndx}{m\sqrt[m]{x^{n+m}}}$.

Die

Die 2. Aufgabe.

24. Zwo Grössen, welche einander dividiren, $x:y$ zu differentiiren.

Auflösung.

Es sey $x:y = v$

so ist $x = vy$

$dx = vdy + ydv$ (§. 16).

$dx - vdy = ydv$

das ist, $dx:y - xdy:y^2 = dv$

oder $(ydx - xdy):y^2 = dv$.

Regel.

(1) Multipliciret die differential-Grösse des Zehlers in den Nenner, und (2) des Nenners in den Zehler. (3) Ziehet das letztere Product von dem erstern ab. (4) Das übrige dividiret durch das Quadrat des Nenners.

Zusatz.

25. Wenn in dem Zehler und Nenner viele veränderliche Grössen enthalten sind, so könnet ihr sie gleichfalls nach den gegebenen Regeln differentiiren, wenn ihr zwo als eine ansehet. Denn es sey $xy:vz$ zu differentiiren. Setzet $xy = t$ und $vz = s$; so ist $d(xy:vz) = (sdt - tds):s^2$. Nun ist

$dt =$

$dt = xdy + ydx$, und $ds = vdz + zdv$ (§. 16). Derowegen ist $sdt - tds = vzxdy + vzydx - vxydz - xyzdv$, folglich $d(xy : vz) = (vzxdy + vzydy - xyzdv - xyvdz) : v^2z^2$.

Die 1. Anmerckung.

26. Wie wir die Regel in der Division gefunden haben, so hättet ihr auch alle Regeln finden können, welche in dem 4, 5 und 6 Zusatze der vorhergehenden Aufgabe auf eine andere Art hergeleitet worden sind: Denn setzet

$$\sqrt[m]{x^n} = v,$$

so ist $x^n = v^m$

$$nx^{n-1}dx = mv^{m-1}dv \text{ (§. 18).}$$

$$nx^{n-1}dx : mv^{m-1} = dv.$$

Nun ist $v^{m-1} = v^m : v = x^n : \sqrt[m]{x^n}$, folglich $nx^{n-1}dx : mv^{m-1} = nx^{n-1}dx\sqrt[m]{x^n} : mx^n = (n:m)\, x^{-1}dx\sqrt[m]{x^n} = (n:m)\, x^{-1}x^{n:m}dx = (n:m)x^{n:m-1}dx$, wie ihr es (§. 20) gefunden habt.

Die 2. Anmerckung.

27. Damit ihr den Nutzen der differential-Rechnung in der höhern Geometrie sehet, so muß ich zeigen, wie die Eigenschaften der krummen Linien dadurch erfunden werden.

Von den Tangentibus der krummen Linien, oder den geraden Linien, welche sie berühren.

Die 6. Erklärung.

Tab. IX. Fig. 75.

28. Weil der Punct, welcher die krumme Linie beschreibt, in seiner Bewegung seine Direction beständig ändert (§. 2, 8 *Geom.*); so kan man sich die krummen Linien vorstellen, als wenn sie aus unendlich kleinen geraden Linien zusammen gesetzt, und daher ein Polygon von unzehlich unendlich kleinen Seiten wären. Wenn ihr nun setzet, daß eine von diesen Seiten Mm in eine endliche gerade TM verlängert wird; so ist selbige der Tangens der krummen Linie.

Zusatz.

29. Derowegen zeigt der Tangens die Direction, welche der Punct, der die krumme Linie beschrieben, an jedem Theile derselben gehabt hat.

Die 7. Erklärung.

Tab. IX. Fig. 76.

30. **Der SUBTANGENS ist die Linie PT, welche zwischen dem Tangente TM und der Semiordinate PM enthalten ist.**

Die 8. Erklärung.

Tab. IX. Fig. 75.

31. **Wenn ihr in dem Puncte der Berührung M eine perpendicular-Linie MH aufrichtet, bis sie die Axe in H erreicht, so heißt sie die normal-Linie;** der

der Theil der Axe oder PH, welcher zwischen ihr und der Semiordinate PM lieget, die subnormal-Linie.

Die 3. Aufgabe.

32. **In einer jeden gegebenen algebraischen Linie den zu einem gegebenem Puncte gehörigen Subtangentem zufinden.** Tab. IX. Fig. 75.

Auflösung.

Setzet die Semiordinate pm der andern PM unendlich nahe, und ziehet MR mit der Axe AH parallel, so ist MR=Pp (§. 22 *Geom.*) die Differential der Abscisse AP, mR die Differential der Semiordinate PM (§. 8). Weil nun PM mit *pm* parallel ist, so ist der Winckel MmR dem Winckel TMP gleich (§. 97 *Geom.*): folglich, da bey R und P rechte Winckel sind, mR : MR = PM : PT, (§. 183 *Geom.*). Setzet nun PM=y, PA=x; so ist MR=dx, mR=dy (§. 13), folglich $dy : dx = y$: PT, und demnach PT = $ydx : dy$. Wenn ihr nun den Werth von dx aus der Æquation substituiret, welche die Natur einer krummen Linie insbesondere erkläret; so verschwindet dx und dy, und kommt der Subtangens TP in lauter endlichen Grössen heraus.

Der 1. Zusatz.

33. Es sey $ax=y^2$, so ist $adx=2ydy$, $dx=2ydy:a$, folglich PT=$ydx : dy=2y^2dy : ady$

$=2y^2 : a = 2ax : a = 2x$. Derowegen ist in der Parabel der Subtangens TP zu der Abscisse AP wie 2 zu 1.

Der 2. Zusatz.

34. Es sey für unendliche Parabeln $a^{m-1}x = y^m$, so ist

$$a^{m-1}dx = my^{m-1}dy \text{ (§. 18).}$$

$$dx = my^{m-1}dy : a^{m-1}$$

$$PT = ydx : dy = my^m dy : a^{m-1}dy = my^m : a^{m-1} = ma^{m-1}x : a^{m-1} = mx.$$

Wenn also $m=3$; so ist $PT=3x$, das ist, in der Parabel von dem andern Geschlechte ist $PT:AP=3:1$ &c.

Der 3. Zusatz.

35. Es sey $a^n x^r = y^m$, so ist

$$ra^n x^{r-1}dx = my^{m-1}dy \text{ (§. 18).}$$

$$dx = my^{m-1}dy : ra^n x^{r-1}$$

$$PT = ydx : dy = my^m dy : ra^n x^{r-1}dy = my^m : ra^n x^{r-1} = ma^n x^r : ra^n x^{r-1} = mx : r.$$

Setzet z. E. $a^3x^2 = y^5$; so ist $PT = \frac{5}{2}x$, das ist, $PT:AP=5:2$.

Der 4. Zusatz.

36. In dem Circul ist $ax - xx = yy$, und demnach

$$adx - 2xdx = 2ydy$$

$$dx = 2ydy : (a - 2x)$$

$PT = ydx : dy = 2y^2dy : (a - 2x)dy = 2y^2 : (a - 2x) = (ax - xx) : (\frac{1}{2}a - x)$. Solchergestalt ist $\frac{1}{2}a - x : a - x = x : PT$.

Weil $PT = (ax - xx) : (\frac{1}{2}a - x)$; so ist $AT = (ax - xx) : (\frac{1}{2}a - x) - x = (ax - xx - \frac{1}{2}ax + xx) : (\frac{1}{2}a - x) = \frac{1}{2}ax : (\frac{1}{2}a - x)$, folglich $a - 2x : a = x : AT$. Tab. IX. Fig. 75.

Der 5. Zusatz.

37. Es sey für unendliche Circul (§. 259. A. I.).

$$ax^m - x^{m+1} = y^{m+1}$$

so ist $max^{m-1}dx - (m+1)x^m dx = (m+1)y^m dy$

$$dx = (m+1)y^m dy : (max^{m-1} - (m+1)x^m)$$

$PT = ydx : dy = (m+1)y^{m+1} : (max^{m-1} - (m+1)x^m) = (m+1)(ax^m - x^{m+1}) : (max^{m-1} - (m+1)x^m) = (m+1)(ax - x^2) : (ma - mx - x)$. Demnach ist $AT = (m+1)(ax - x^2) : (ma - (m+1)x) - x = (max + ax - mx^2 - x^2 - max + mx^2 + x^2) : (ma - (m+1)x) = ax : (ma - (m+1)x)$.

Es sey ein Circul von dem andern Geschlechte, so ist $m = 2$, also $AT = ax : (2a - 3x)$ und $PT = (3ax - 3x) : (2a - 3x)$.

Der 6. Zusatz.

38. In der Ellipsi ist $ay^2 = abx - bx^2$ (§. 239 P. I.) und daher

$$2aydy = abdx - 2bxdx$$

$$dx = 2aydy : (ab - 2bx)$$

$PT = ydx : dy = 2ay^2 dy : (ab - 2bx) dy = 2ay^2 : (ab - 2bx) = (2abx - 2bx^2) : (ab - 2bx) = (2ax - 2x^2) : (a - 2x)$. Daher ist $AT = (2ax - 2x^2) : (a - 2x) - x = (2ax - 2x^2 - ax + 2x^2) : (a - 2x) = ax : (a - 2x)$ wie im Circul (§. 36).

Der 7. Zusatz.

39. Für unendliche Ellipses ist (§. 258 P. I.) $ay^{m+n} = bx^m (a-x)^n$ und daher

$$(m+n) ay^{m+n-1} dy = mbx^{m-1} (a-x)^n dx - nbx^m (a-x)^{n-1} dx$$

$$(m+n) ay^{m+n-1} dy : (mbx^{m-1} (a-x)^n - nbx^m (a-x)^{n-1}) = dx$$

$PT = ydx : dy = (m+n) ay^{m+n} : (mbx^{m-1} (a-x)^n - nbx^m (a-x)^{n-1}) = (mbx^m (a-x)^n + nbx^m (a-x)^n) : mbx^{m-1} (a-x)^n - nbx^m (a-x)^{n-1}) =$ (wenn ihr mit bx^{m-1} und $(a-x)^{n-1}$ dividiret) $(m+n)(ax - xx) : (ma - mx - nx)$.

Derowegen ist $AT = (m+n)(ax - xx) : (ma - mx - nx) - x - (max = mx^2 + nax - nx^2 - max$

$max+mx^2+nx^2):(ma-mx-nx)=nax:(ma-mx-nx)$.

Es sey z. E. eine Ellipsis von dem andern Geschlechte, so ist $m=2$, $n=1$ (§. 258 P. I.), $PT=(3ax-3xx):(2a-3x)$, $AT=ax:(2a-3x)$.

Der 8. Zusatz.

40. Für eine Hyperbel ist $ay^2=abx+bxx$ (§. 260 P. I.) und daher findet ihr wie (§. 38) $PT=(2ax+2xx):(a+2x)$, und $AT=ax:(a+2x)$.

Der 9. Zusatz.

41. Für unendliche Hyperbeln ist $ay^{m+n}=bx^m(a+x)^n$ (§. 286 P. I.). Derowegen findet ihr, wie (§. 39) $PT=(m+n)(ax+xx):(ma+mx+nx)$ und $AT=nax:(ma+mx+nx)$.

Der 10. Zusatz.

42. Für eine Hyperbel zwischen ihren Asymptoten ist $xy=aa$ (§. 284 P. I.).

Daher $xdy+ydx=0$ (§. 14, 16).

$$ydx=-xdy$$

$$PT=ydx:dy=-xdy:dy=-x.$$

Also ist der Subtangens der Abscisse gleich, muß aber, weil $-x$ ist, ihrem Ursprunge entgegen gesetzt werden, das ist, wenn der

Punct, wovon die Abscissen gerechnet werden, zur Lincken der Semiordinate ist, so wird der Subtangens auf der Asymptote zu ihrer Rechten genommen.

Der 11. Zusatz.

43. Für unendliche Hyperbeln zwischen ihren Asymptoten ist $a^{m+n} = y^m x^n$ (§. 285. P. I.).

Daher $o = mx^n y^{m-1} dy + nx^{n-1} y^m dx$

$-mx^n y^{m-1} dy : nx^{n-1} y^m = dx$

$PT = ydx : dy = -mx^n y^m : nx^{n-1} y^m = -\frac{mx}{n}$.

Es sey eine Hyperbel von dem andern Geschlechte, so ist $m = 2$, $n = 1$, $PT = -2x$.

Der 12. Zusatz.

44. Endlich, weil für alle algebraische Linien (§ 214 P I.).

$ay^m + bx^n + cy^r x^s + f = o$, so ist

$may^{m-1} dy + nbx^{n-1} dx + rcy^{r-1} x^s dy + scy^r x^{s-1} dx = o$

$nbx^{n-1} dx + scy^r x^{s-1} dx = -may^{m-1} dy - rcy^{r-1} x^s dy$

$dx = (-may^{m-1} dy - rcy^{r-1} x^s dy) : (nbx^{n-1} + scy^r x^{s-1}$

PT

$PT = ydx : dy = (-may^m - rcy^r x^s) : (nbx^{n-1} + scy^r x^{s-1})$, nach welcher Regel aller algebraischen Linien Subtangentes gefunden werden, wenn ihr für die undeterminirten Buchstaben a, c, b und die Exponenten m, n, r, s ihren Werth aus ihrer Gleichung setzet. Z. E. Weil für die Parabel von dem ersten Geschlechte

$ax = y^2$, oder $y^2 - ax = o$, so ist

$$\underline{ay^m = y^2} \quad \underline{bx^n = -ax} \quad \underline{cy^r x^s = o} \quad s = o$$

$$a = 1, m = 2, b = -a, n = 1, c = o \; r = o \; s = o$$

daher $PT = (-2.\,1y^2 - o.\,ay^o x^o) : (-1.\,ax^{1-1} + o.\,oy^o x^{o-1}) = -2y^2 : -a = 2ax : a = 2x.$

Wiederum: es sey $y^3 - x^3 - axy = o$; so ist

$$\underline{ay^m = y^3}, \quad \underline{bx^n = -x^3}, \quad \underline{cy^r x^s = -axy} \quad s = o$$

$a = 1, m = 3, b = -1, n = 3, c = -a, r = 1, s = 1$
daher $PT = (-3.\,1y^3 - 1.\,-ayx) : (3.\,-1x^{3-1} + 1.\,-ayx^{1-1}) = (-3y^3 + axy) : (-3x^2 - ay) = (3y^3 - ayx) : (-3x^2 + ay)$: folglich $AT = (3y^3 - ayx) : (3x^2 + ay) - x = (3y^3 - axy - 3x^3 - axy) : (3x^2 + ay) = (3axy - 2axy) : (3x^2 + ay) = axy : (3x^2 + ay)$. Denn da $y^3 - x^3 = axy$; so ist $4y^3 - 3x^3 = 3ayx$.

Der 13. Zusatz.

45. Weil PT$=ydx:dy$, PM$=y$; so ist TM$=\sqrt{}(y^2dx^2:dy^2+y^2)=\sqrt{}((y^2dx^2+y^2dy^2):dy^2)=y\sqrt{}(dx^2+dy^2):dy$

Die 4. Aufgabe.

Tab. IX. Fig. 75.

46. **Die subnormal = Linie PH in einer algebraischen Linie zufinden.**

Auflösung.

Weil der Triangel TMH bey M recht=winckelicht ist, so ist TP : PM$=$PM : PH (§. 210 Geom.). $(ydx:dy):y=y:$PH. Derowegen PH $=y^2dy:ydx=ydy:dx$. Wenn ihr demnach aus der Gleichung für eine besondere Linie den Werth von dy durch x exprimiret; so bekommet ihr die subnormal=Linie, wie vorhin den Subtangentem, in lauter endlichen Grössen.

Der 1. Zusatz.

47. Es sey $ax=y^2$,

so ist $adx=2ydy$

$\frac{1}{2}adx=ydy$

PH$=ydy:dx=adx:2dx=\frac{1}{2}a$.

Demnach ist in der Parabel die subnormal=Linie beständig dem halben Parameter gleich,

gleich, folglich die normal-Linie $MH=\sqrt{(yy+\frac{1}{4}aa)}=\sqrt{(ax+\frac{1}{4}aa)}$.

Der 2. Zusatz.

48. Es sey $ax-xx=y^2$

$$adx-2xdx=2ydy$$

$$\frac{1}{2}adx-xdx=ydy$$

$$PH=ydy:dx=\frac{1}{2}a-x.$$

Daher ist klar, daß alle normal-Linien in dem Circul durch den Mittelpunct gehen, oder, daß alle Radii des Circuls auf der Peripherie perpendicular stehen, und demnach der Tangens des Circuls mit dem Radio einen rechten Winckel macht.

Der 3. Zusatz.

49. Weil $PH=ydy:dx$, und $PM=y$; so ist $HM=\sqrt{(y^2+y^2dy^2:dx^2)}=\sqrt{(y^2dx^2+y^2dy^2:dx^2)}=y\sqrt{(dx^2+dy^2)}:dx$.

Die 5. Aufgabe.

50. **Die Asymptoten einer algebraischen Linie zudeterminiren.** Tab. IX. Fig. 75.

Auflösung.

1. Wenn die Abscisse AP unendlich groß wird, so ist der Tangens TM die Asymptote, als welche die krumme Linie nicht

eher als in einer unendlichen Weite, das ist, niemals berühren kan (§. 278 P. I.). Daher werden die unveränderlichen Grössen, in Ansehung der Abscisse x, unendlich kleine. Wenn ihr demnach in dem Werthe von AT diejenigen Grössen weglasset, die nicht mit x multipliciret sind; so findet ihr die Weite des Puncts C, aus welcher die Asymptote CD gezogen wird, von dem Scheitel-Puncte A.

Z. E. In der Hyperbel ist AT $= ax:(a+2x)$, und demnach a, in Ansehung x, unendlich kleine, folglich $ax:2x = \frac{1}{2}a =$ AC, wie schon oben (§. 272, 278 P. I.) auf andere Art ist erwiesen worden.

2. Lasset nun ferner auch in der Gleichung für die krumme Linie die unveränderlichen Grössen, welche durch keine andere multipliciret sind, weg; so könnet ihr dadurch den Werth von AE finden, und folglich die Asymptote ziehen.

Z. E. In der Hyperbel ist $ay^2 = bx(a+x)$. Da nun a, in Ansehung x, unendlich klein ist, so habet ihr

$$ay^2 = bx^2$$

folglich $$y\sqrt{a} = x\sqrt{b}$$

$$dy\sqrt{a}=dx\sqrt{b}$$

$$dx:dy=\sqrt{a}:\sqrt{b}.$$

Nun ist $dx:dy=AC:AE$ (§. 183 Geom.) das ist $\sqrt{a}:\sqrt{b}=\frac{1}{2}a:AE$.

Demnach ist $AE=\frac{1}{2}a\sqrt{b}:\sqrt{a}=\sqrt{\frac{1}{4}aab}:\sqrt{a}=\sqrt{\frac{1}{4}ab}$, wie abermal oben (§. 272, 278 P. I.) schon auf andere Art erwiesen worden ist.

Anders.

Weil TP:PM=TA:AG; so ist in dem Asymptotischen Falle, da TP zu CP, TA zu CA, und AG zu AE wird, CP:PM=CA:AE. Nun ist $TP=2x(a+x):(a+2x)$, und also $CP=2x^2:2x=x$, weil in dem asymptotischen Falle $a=0$. Daher ist $x:\frac{x\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=\frac{1}{2}a:AE$, folglich $AE=\frac{\frac{1}{2}a\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=\sqrt{\frac{1}{4}ab}$.

Zusatz.

51. In unendlichen Hyperbeln ist (§. 41) überhaupt $AT=nax:(ma+mx+nx)$. Daher $AC=nax:(mx+nx)=na:(m+n)$. Und weil ferner (§. 286 P. I.).

$$ay^{m+n} = bx^m(a+x)^n$$

so ist $ay^{m+n} = bx^{m+n}$

oder, wenn ihr $m+n=r$ setzet

$$ay^r = bx^r$$

$$ya^{1:r} = xb^{1:r}$$

$$dya^{1:r} = dxb^{1:r}$$

$$dx : dy = a^{1:r} : b^{1:r} = AC : AE$$

$$a^{1:r} : b^{1:r} = \frac{na}{r} : AE.$$

Derowegen ist $AE = nab^{1:r} : ra^{1:r}$

$$= \frac{na^{(r-1):r}b^{1:r}}{r} = (n:r)\sqrt[r]{a^{r-1}b}.$$

Die 6. Aufgabe.

Tab. IX. Fig. 78.

52. **Den** Subtangentem AH **in einer Spiral-Linie zufinden.**

Auflösung.

Es sey der halbe Diameter des Circuls AB$=a$, die Peripherie $=b$, der Bogen BD$=x$, AG$=y$, und AC dem radio AD unendlich nahe; so ist CD$=dx$, EF$=dy$. Weil nun EG ein Bogen ist, welcher mit AG beschrieben worden; so ist

AD

$$\begin{array}{ccccccc} AD & : & AG & = & CD & : & EG \\ a & : & y & = & dx & : & ydx : a. \end{array}$$

Weil EG mit FA einen rechten Winckel machet (§. 48), und AH gleichfalls auf EA perpendicular aufgerichtet worden; so ist (§. *184 Geom.*).

$$\begin{array}{ccccccc} FE & : & EG & = & GA & : & AH \\ dy & : & \frac{ydx}{a} & = & y & : & \frac{y^2dx}{ady}. \end{array}$$

Nun ist für die Archimedische spiral-Linie

$$ax = by \quad (\S.\ 312\ P.\ I.)$$

daher

$$adx = bdy$$

$$dx = bdy : a$$

$$AH = y^2dx : ady = by^2 : a^2 = axy : a^2 = xy : a.$$

Der 1. Zusatz.

53. Also könnet ihr den Subtangentem nicht finden, ihr müsset vorher den Circul-Bogen x in eine gerade Linie verwandeln können.

Der 2. Zusatz.

54. Für unendliche spiral-Linien ist

a^m

$$n^{m}x^{n}=b^{n}y^{m}\quad (\S.\ 312\ P.\ I.).$$

$$na^{m}x^{n-1}dx=mb^{n}y^{m-1}dy$$

$$dx=mb^{n}y^{m-1}dy : na^{m}x^{n-1}$$

$AH=y^{2}dx:ady=mb^{n}y^{m+1}:na^{m+1}x^{n-1}=ma^{m}x^{n}y:na^{m+1}x^{n-1}=mxy:na.$

Der 3. Zusatz.

Tab. IX. Fig. 78.

55. Setzet, daß der Bogen BC sich zu FC verhalten solle, wie die Absciffe in einer algebraischen Linie zu ihrer Semiordinate. Solchergestalt ist $BC=x$, $CD=dx$, $FC=y$, $EF=dy$.

Nun ist

$$AD : AG = CD : EG$$
$$r : r-y = dx : \frac{rdx-ydx}{r}$$

$$FE : EG = GA : AH$$
$$dy : \frac{rdx-ydx}{r} = r-y : \frac{(r-y)^{2}dx}{rdy}.$$

Wenn ihr nun für dx in dem Werthe von AH seinen Werth aus der Gleichung einer algebraischen Linie setzet; so habt ihr den Subtangentem AH.

Z. E. In der Parabel ist $ax=y^{2}$, und also $dx=2ydy:a$. Derowegen wenn der Bogen BC die Absciffe einer Parabel, FC die Semiordinate, und a ihren Parameter vorstellet; so

so ist $AH = 2(r-y)^2 ydy : radr = (2r^2y - 4ry^2 + 2y^3) : ra = (2r^2y - 4arx + 2axy) : ra = \frac{2xy}{r} - 4x + 2ry : a$.

Anmerckung.

56. Ihr könnet BC für die Abscisse und FC für die Semiordinate einer jeden algebraischen Linie annehmen, und aus der allgemeinen Gleichung für alle krumme Linien einen allgemeinen Werth für AH finden.

Die 7. Aufgabe.

57. **Den Subtangentem PT in der Conchoide des Nicomedis zufinden.** Tab. IX. Fig. 79.

Auflösung.

Es sey $AP = x$, $PM = y$, $Pp = MR = dx$, und $Rm = dy$. Daher ist $PT = ydx : dy$. Es sey ferner $AB = QM = a$, $CM = z$, $BC = b$; so ist $PB = a - x$, $PC = a + b - x$. Damit man den Werth von dx aus der Natur der krummen Linie finden möge; so setzet

$$a - x = v \qquad a + b - x = t$$

so ist $-dx = dv \qquad -dx = dt$

Ferner (§. 184 Geom.)

$$PB : MQ = PC : MC$$
$$v : a = t : z$$
$$at = vz$$
$$adt = zdv + vdz$$

End-

Endlich (§. 172 *Geom.*) $CM^2 = PC^2 + PM^2$, das ist,

$$z^2 = t^2 + y^2$$
$$2zdz = 2tdt + 2ydy$$
$$zdz = tdt + ydy.$$

Setzet aus den vorhergehenden Gleichungen für dv und dt ihren Werth in den beyden letztern; so habt ihr

$$-adx = -zdx + vdz \qquad zdz = -tdx + ydy$$
$$zdx - adx = vdz \qquad dz = \frac{-tdx + ydy}{z}$$
$$\frac{zdx - adx}{v} = dz$$

daher:

$$\frac{zdx - adx}{v} = \frac{-tdx + ydy}{z}$$
$$z^2dx - azdx = -vtdx + vydy$$
$$z^2dx - azdx + vtdx = vydy$$
$$dx = \frac{vydy}{z^2 - az + vt}.$$

Daher ist $PT = ydx : dy = vy^2 : (z^2 - az + vt)$, und die subnormal-Linien $ydy : dx = (z^2 - az + vt) : v = t + (z^2 - az) : v$.

Die

Da $v : z - a = z : \frac{(z^2 - az)}{v}$; so ist $(z^2 - az) : v$ die vierte proportional-Linie zu PB, QC und CM. Wenn man nun PC verlängert, bis der verlängerte Theil ihr gleich wird; so hat man die subnormal-Linie, und kan demnach die normal-Linie und den Tangentem auf eine leichte Weise ziehen.

Die 8. Aufgabe.

58. **Den** Subtangentem PT **in der** Cycloide **zufinden.** Tab. IX. Fig. 80.

Auflösung.

Es sey APB der Circul, welcher die Cycloidem beschreibt, KP der Tangens des Circuls, qm der andern Linie QM unendlich nahe, und MR mit dem unendlich kleinen Bogen Pp parallel, welchen ihr für eine gerade Linie halten könnet. Da nun MS = PO, und der Winckel bey R so groß wie der bey p (§. 97 *Geom.*), folglich, weil bey S und O rechte Winckel sind, RMS = pPO (§. 105 *Geom.*); so ist auch MR = Pp (§. 71 *Geom.*). Es sey AP = x, PM = y, so ist Pp = MR = dx, mR = dy. Nun ist Rm mit PM parallel, und daher MmR = TMP (§. 97 *Geom.*). Und weil MR mit TP parallel ist, so ist mRM = MPT (§. *cit.*), folglich (§. 183 *Geom.*).

$$mR : MR = PM : PT$$
$$dy : dx = y : \frac{ydx}{dy}.$$

Nun ist in der Cycloide (§. 310. P. I.) $y = x$, und daher $ay = dx$, folglich $ydx : dy = y$.

Der 1. Zusatz.

Tab. IX. Fig. 80.

59. Wenn ihr also den Tangentem des Circuls PK (§. 48) ziehet; so ist es auch leicht, den Tangentem der Cycloidis TM zuziehen.

Der 2. Zusatz.

60. Lasset AP eine andere algebraische krumme Linie seyn, derer Tangentem ihr ziehen könnet, ihre Bogen aber AP die Abscissen der transcendentischen Linie AMC; so könnet ihr auf gleiche Weise ihre Tangentes ziehen. Es sey Z. E.

$$bx = ay$$

so ist $$bdx = ady$$

$$dx = ady : b$$

$$PT = ydx : dy = aydy : bdy = ay : b.$$

Die 9. Aufgabe.

Tab. IX. Fig. 81.

61. **Den** Subtangentem TP **zu der logarithmischen Linie zufinden.**

Auf-

Auflösung.

Es sey AH die Axe, PM die Ordinate. Setzet AP $=x$, PM $=y$, so ist Pp $=$ RM $=dx$, mR $=dy$, und weil die Aehnlichkeit der Triangel mRM und PMT, wie oben (§. 32), erwiesen werden kann; so ist (§. 184 *Geom.*).

$$mR : RM = PM : PT$$
$$dy : dx = y : \frac{ydx}{dy}$$

Setzet eine andere Abscisse $=v$, die zugehörige Semiordinate $=z$; so ist der Subtangens $=zdv : dz$. Weil die Abscissen in einer arithmetischen Progreßion fortgehen; so ist $dx=dv$ (§. 69 *Arithm.*). Hingegen, weil die Semiordinaten in einer geometrischen fortschreiten (§. 306 P. I.), so ist

$$y : y+dy = z : z+dz$$

daher $y : dy = z : dz$ (§. 142 P. I.)

Nun ist $dx = dv$

Daher $ydx : dy = zdv : dz$ (§. cit.).

Also sind in der logarithmischen Linie alle Subtangentes einander gleich, oder der Subtangens ist eine unveränderliche Linie.

Von den grösten und kleinesten Applicaten der krummen Linien.

Die 9. Erklärung.

62. Wenn die Semiordinaten bis zu einem gewissen Ziele immer mit den Abscissen wachsen, hernach aber wieder abnehmen, unerachtet diese noch beständig zunehmen; so nennet man die Gröste diejenige, wo der Wachsthum aufhöret. Jngleichen, wenn sie auf ein gewisses Ziel immer abnehmen, indem die Abscissen zunehmen, und hernach mit diesen fortwachsen, so heißt diejenige die Kleinste, wo die Vergeringerung aufhöret. Die Methode, einen Werth der Abscisse in lauter unveränderlichen Grössen zufinden, dem die gröste oder kleineste Applicate oder Semiordinate zukommt, nennet man die Methode von den grösten und Kleinesten (Methodum de maximis & minimis).

Anmerckung.

63. Man kann hierdurch auch viele andere Fragen auflösen, in welchen das gröste oder kleineste unter Dingen von einer Art gesucht wird, wie es die folgenden Exempel zeigen werden.

Die 10. Aufgabe.

Tab. IX. Fig. 82.

64. Die gröste oder kleineste Applicate in

in einer algebraischen Linie zudeterminiren.

Auflösung.

Es ist klar, daß der Tangens in dem Puncte G, wo die gröste oder kleineste Applicate ist, mit der Axe parallel lauft, und daher der Subtangens unendlich groß ist. Wenn nun in allen algebraischen Linien der Subtangens $ydx : dy$ (§. 32) unendlich groß wird; so ist dy, in Ansehung des Zehlers ydx, unendlich klein, weil er dy unendliche mal in sich begreifen muß, und darum $dy = o$ (§. 4). Suchet derowegen aus der gegebenen Gleichung für die krumme Linie die Differential-Grösse der Applicate, und setzet sie $= o$; so könnet ihr aus dieser Gleichung den Werth von x durch gehörige Reduction finden.

In einigen Linien fällt der Tangens in die Applicate CG, und alsdenn ist der Subtangens $ydx : dy = o$. Wenn nun dieser Bruch unendlich klein seyn soll, so muß dy unendlich groß seyn in Ansehung des Zehlers ydx. Dannenhero wann $dy = o$ keinen möglichen Werth für die Abscisse zur grösten Applicate giebt; so setzet $= dy\,\infty$, das ist, einem unendlichen Werthe, und suchet aus dieser Gleichung die Abscisse x.

Tab. IX. Fig. 83.

Der 1. Zusatz.

65. Im Circul ist

$$ax - xx = y^2$$

$$adx - 2xdx = 2ydy$$

$$(adx - 2xdx) : 2y = dy = 0$$

$$a - 2x = 0$$

$$\frac{1}{2}a = x.$$

Die Abscisse, welche in dem Circul der grösten Applicate zugehöret, ist dem halben Diameter gleich.

Der 2. Zusatz.

66. Für unendliche Circul ist

$$max^{m-1}dx - (m+1)x^m dx = (m+1)y^m dy = 0$$

$$max^{m-1} = (m+1)x^m$$

$$ma = (m+1)x$$

$$ma : (m+1) = x.$$

Es sey $m = 3$, so ist es ein Circul von dem dritten Geschlechte, und $x = \frac{3}{4}a$.

Der 3. Zusatz.

67. Für unendliche Ellipses ist

$(m+$

$(m+n)ay^{m+n-1}dy = mbx^{m-1}(a-x)^n dx - nbx^m(a-x)^{n-1}dx$

$dy = mbx^{m-1}(a-x)^n dx - nbx^m(a-x)^{n-1}dx : (m+n)ay^{m+n-1} = o$

$nbx^m(a-x)^{n-1} = mbx^{m-1}(a-x)^n$

$x^{m-1}(a-x)^{n-1}$

$nbx = mba - mbx$

$nbx + mbx = mba$

$x = ma : (m+n).$

Es sey $m = 1$, $n = 1$, so ist es eine Ellipsis von dem ersten Geschlechte und $x = \frac{1}{2}a$, wie im Circul. Hingegen sey $m = 2$, $n = 1$, so ist es eine Ellipsis von dem andern Geschlechte und $x = \frac{2}{3}a$.

Der 4. Zusatz.

68. Es sey $x^3 + y^3 = axy$

so ist $3x^2dx + 3y^2dy = axdy + aydx$

$3x^2dx - aydx = axdy - 3y^2dy$

$(3x^2dx - aydx) : (ax - 3y^2) = dy = o$

$3x^2 = ay$

$3x^2 : a = y$

$$x^3 + 27x^6 : a^3 = 3ax^3 : a = 3x^3$$

$$27x^6 = 2a^3x^3$$

$$27x^3 = 2a^3$$

$$3x = a\sqrt[3]{2}$$

$$x = \tfrac{1}{3}a\sqrt[3]{2}.$$

Der 5. Zusatz.

69. Es sey $y - a = a^{1:3}(\ -x)^{2:3}$

$$dy = -2dxa^{1:3} : 3(a-x)^{1:3} = o$$

$$-2a^{1:3} = o.$$

Weil ihr keinen Werth von x findet, wenn ihr $dy = o$ setzet, so nehmet

$$dy = -2dxa^{1:3} : 3(a-x)^{1:3} = \infty.$$

Also ist $3(a-x)^{1:3}$ in Ansehung seines Zehlers $2dxa^{1:3}$ unendlich klein. Darum habt ihr

$$3(a-x)^{1:3} = o$$

$$a - x = o$$

$$a = x.$$

Die 11. Aufgabe.

Tab. IX. Fig. 75.

70. **Aus dem gegebenen Puncte H in der Axe einer krummen Linie an die Peripher-**

ripherie eine gerade Linie HM zuziehen, welche die kleineste unter allen ist welche sich aus diesem Puncte ziehen lassen.

Auflösung.

Es sey $AP = x$, $PM = y$, $AH = c$, so ist $PH = c - x$, und, weil $PM^2 + PH^2 = MH^2$ (§. 172 Geom.); $c^2 - 2cx + xx + yy = MH^2$. Nehmet MH an als die Applicate einer krummen Linie, und setzet

$$c^2 - 2cx + xx + yy = z^2$$

so ist $2xdx - 2cdx + 2ydy = 2zdz$

$$(2xdx - 2cdx + 2ydy) : 2z = dz = 0$$

$$xdx - cdx + ydy = 0.$$

Wenn ihr nun aus der Gleichung für eine krumme Linie den Werth von ydy setzet; so könnet ihr daraus AP determiniren, welcher die Applicate PM zugehöret, dahin die kürzeste Linie HM gezogen wird.

Der 1. Zusatz.

71. Es sey für eine Parabel

$$ax = yy$$

so ist $adx = 2ydy$

$$\tfrac{1}{2}adx = ydy$$

$$xdx - cdx + ydy = xdx - cdx + \tfrac{1}{2}adx = 0$$

$$x - c + \tfrac{1}{2}a = 0$$

$$x = c - \tfrac{1}{2}a.$$

Der 2. Zusatz.

72. Es sey für eine Ellipsin

$$ay^2 = abx - bx^2$$

so ist $2aydy = abdx - 2bxdx$ — $2a$

$$ydy = \frac{1}{2}bdx - bxdx : a$$

$$xdx - cdx + ydy = xdx - cdx + \frac{1}{2}bdx - bxdx : a = 0$$

$$x - c + \frac{1}{2}b - bx : a = 0$$

$$ax - ac + \frac{1}{2}ab - bx = 0$$

$$ax - bx = ac - \frac{1}{2}ab$$ — $a-b$

$$x = (ac - \frac{1}{2}ab) : (a - b).$$

Der 3. Zusatz.

73. Auf gleiche Weise findet ihr für die Hyperbel, daß $x = (ac + \frac{1}{2}ab) : (a + b)$.

Die 12. Aufgabe.

Tab. VIII. Fig. 67.

74. **Eine Linie AB dergestalt in D zuschneiden, daß das Product aus dem Qua-**

Quadrate des einen Theils AD in den andern DB das gröste sey unter allen, welche auf dergleichen Art formiret werden können.

Auflösung.

Es sey AB $= a$, AD $= x$, so ist $AD^2 . DB = axx - x^3$. Setzet demnach, es sey eine krumme Linie, in welcher

$$axx - x^3 = aay$$

so ist $2axdx - 3x^2dx = aady$

$$(2axdx - 3x^2dx) : aa = dy = 0$$

$$2ax = 3x^2$$

$$\tfrac{2}{3}a = x.$$

Die 13. Aufgabe.

75. **Eine Linie AB dergestalt in D zu schneiden, daß das Product aus einer gegebenen Dignität des einen Theils AD in eine gegebene Dignität des andern Theils DB das gröste unter allen sey, welche auf dergleichen Art formiret werden.** Tab. VIII. Fig. 67.

Auflösung.

Es sey AB $= a$, AD $= x$; so ist $x^m(a-x)^n$ das gröste von seiner Art. Setzet demnach

x^m

$x^m(a-x)^n = a^{m+n-1}y$

so ist $mx^{m-1}(a-x)^n dx - nx^m(a-x)^{n-1}dx$
$= a^{m+n-1}dy$

$(mx^{m-1}(a-x)^n dx - nx^m(a-x)^{n-1}dx) :$
$a^{m+n-1} = dy = 0$

$mx^{m-1}(a-x)^n = nx^m(a-x)^{n-1}$

$m(a-x)^n = nx(a-x)^{n-1}$

$ma - mx = nx$

$ma : (m+n) = x.$

Die 14. Aufgabe.

76. Unter allen Parallelepipedis, welche einem gegebenen Würfel gleich sind, und deren eine Seite gegeben wird, dasjenige zufinden, welches die geringste Fläche hat.

Auflösung.

Es sey b die eine Seite, x die andere, der gegebene Würfel $= a^3$, so ist die dritte $= a^3 : bx$.

Folglich die Fläche des Parallelepipedi $2bx + 2a^3 : x + 2a^3 : b$. Setzet demnach, es sey in einer krummen Linie

$$2bx + 2a^3 : x + 2a^3 : b = ay$$

so ist $2bdx - 2a^3dx : x^2 = ady = 0$

$$2b - 2a^3 : x^2 = 0$$

$$bx^2 = a^3$$

$$x^2 = a^3 : b$$

$$x = \sqrt{(a^3 : b)}.$$

Also sind die drey Seiten b, $\sqrt{(a^3 : b)}$ und $a^3 : b\sqrt{(a^3 : b)} = \sqrt{(a^6 : \sqrt{(b^2a^3 : b)}} = \sqrt{(a^6 : \sqrt{a^3b})} = \sqrt{(a^3 : b)}$.

Die 15. Aufgabe.

77. **Unter allen Parallelepipedis, welche einem gegebenen Würfel gleich sind, dasjenige zufinden, welches die kleineste Fläche hat.**

Auflösung.

Es sey der gegebene Würfel $= a^3$, die eine Seite $= x$, so sind die beyden andern Seiten (§. 76) $\sqrt{(a^3 : x)}$, und daher ist die Fläche des Parallelepipedi $= 2a^3 : x + 4\sqrt{a^3x}$. Da nun dieses die kleinste von ihrer Art ist, so setzet die Gleichung für eine krumme Linie

$2a^3 : x + 4\sqrt{a^3x} = ay$

so ist $-2a^3dx : x^2 + 2a^3dx : \sqrt{a^3x} = ady$

$-2a^2dx : x^2 + 2a^2dx : \sqrt{a^3x} = o$

$a^2 : \sqrt{a^3x} = a^2 : x^2$

$x^2 = \sqrt{a^3x}$

$x^4 = a^3x$

$x^3 = a^3$

$x = a.$

Also hat der Würfel selbst die kleinste Fläche.

Die 16. Aufgabe.

78. **Unter allen Kegeln, welche innerhalb einer Kugel beschrieben werden können, denjenigen zudeterminiren, welcher die gröste Fläche hat.**

Auflösung.

Tab. X. Fig. 84.

Es ist klar, daß, wenn sich ein halber Circul um seinen Diameter AB wendet, derselbe eine Kugel, die Triangel aber ANP, AFE &c. Kegel beschreiben. Die Fläche des Kegels kommt heraus, wenn ihr die Seite des Kegels FA durch die halbe Peripherie, welche mit dem Radio FE beschrieben worden ist, multipliciret. Weil ihr nun die gröste von ihrer Art suchet, so setzet AE=

AE $= x$, AB $= a$, und es ist FE $= \sqrt{(ax - xx)}$ (§. 210 *Geom.*) die halbe Peripherie $m\sqrt{(ax - xx)}$, AF $= \sqrt{ax}$. Derowegen habt ihr die Gleichung für eine krumme Linie.

$$m\sqrt{(ax - xx)}\sqrt{ax} = ay$$

$$m\sqrt{(a^2x^2 - ax^3)} = ay$$

$$2ma^2xdx - 3max^2dx : 2\sqrt{(a^2x^2 - ax^3)} = ady$$

$$2ax - 3x^2 = 0$$

$$2a = 3x$$

$$\tfrac{2}{3}a = x.$$

Ende des andern Theils.



Der dritte Theil,
von den
Anfangs-Gründen
der
Integral-Rechnung.

Die 1. Erklärung.

79. Die integral-Rechnung ist eine Wissenschaft, aus einer gegebenen unendlich kleinen Grösse diejenige endliche zu finden, durch deren Differentiirung sie entstehet.

Zusatz.

80. Derowegen habt ihr eine gewisse Probe, ob ihr die rechte Grösse gefunden habt, wenn ihr die gefundene Integral nach den oben gegebenen Regeln differentiiret, und die gegebene Differential wieder heraus kommt.

Die 2. Erklärung.

81. Integriren oder Summiren heißt die Grösse finden, aus welcher durch Differentiirung die gegebene unendlich kleine entstanden ist.

Die 1. Aufgabe.

82. Eine gegebene Differential zuintegriren oder zusummiren.

Auf-

Auflösung.

Gleichwie man die Differentialen der veränderlichen Grössen durch d andeutet; so pflegt man die Integralen derselben, als die Summe unendlich kleiner Grössen, durch $\int$ anzudeuten. Daher heißt $\int ydx$ so viel als die Integrale von ydx.

Wenn ihr nun die Integrale finden wollet, so vergleichet die gegebene Differentiale mit denen, welche ihr oben (*§. 13 & seqq.*) gefunden habt: so werdet ihr bald wahrnehmen, wie die Veränderung vorzunehmen sey. Es ist aber

I. $\int dx = x \pm a$

II. $\int (dx \pm dy) = x \pm y \pm a$ oder $x \pm y$

III. $\int (xdy + ydx) = xy$

IV. $\int mx^{m-1}dx = x^{m}$

V. $\int (n:m)x^{n-m:m}dx = x^{n:m}$

VI. $\int (ydx - xdy):y^{2} = x:y.$

Von diesen Formeln seyd ihr gewiß, daß sie sich alle integriren lassen, und zwar sezet ihr in dem andern und ersten Falle nur an statt dx oder dy die veränderliche Grösse x oder y selbst. In dem dritten multipliciret ihr die beyden veränderlichen Grössen xy durch einander, wodurch ihre Differentialen dy und dx multipliciret sind. In dem vierten und fünften, (welcher der gewöhnlichste

 ist)

ist) addiret ihr zu dem Exponenten der Dignität der veränderlichen Grösse 1, und durch den vermehrten und die Differentiale der veränderlichen Grösse dividiret ihr die gegebene Differentiale. Endlich in dem sechsten Falle nehmet ihr die veränderliche Grösse mit dem Zeichen — für den Zehler, und die Wurtzel von dem Quadrate des Nenners für den Nenner an.

Die 1. Anmerckung.

83. Es können zwar noch viele andere Fälle vorkommen, welche hier nicht berühret werden: allein ihr werdet es besser aus Exempeln, als durch weitläuftige Regeln lernen.

Die 2. Anmerckung.

84. Mercket aber, daß einige Grössen sind, welche sich nicht integriren lassen. Denn, wie man in der gemeinen Algebra zwar alle Grössen zu einer verlangten Dignität erheben, nicht aber aus jeder Dignität eine verlangte Wurtzel ziehen kann; eben so kann man in der höhern Analysi zwar eine jede veränderliche Grösse differentiiren, allein nicht eine jede Differentiale summiren. Gleichwie man aber in der gemeinen Algebra die Wurtzel durch Näherung sucht, eben so pflegt man in der höhern die Integrale durch Näherung zusuchen, wo man sie nicht vollkommen haben kann. Allein zur Zeit hat man noch keine Regel, aus welcher man schliessen könte, ob die Summation statt findet, oder nicht, und können wohl einige Differentialen zum Summiren geschickt seyn, welche wir zur Zeit noch nicht summiren können.

Von

Von den Quadraturen der krummen Linien.

Die 3. Erklärung.

85. Die Differentiale oder das Element einer ebenen Fläche, welche in eine krumme und zwo gerade Linien eingeschlossen ist, als AMP, ist das Rectangulum aus der Semiordinate PM in die Differentiale der Abscisse Pp. Tab. IX. Fig. 75.

Der 1. Zusatz.

86. Derowegen, wenn die Semiordinate PM $= y$, AP $= x$, so ist Pp $= dx$, und das Rectangulum PMRp $= ydx$.

Der 2. Zusatz.

87. Weil die Semiordinaten PM und pm einander unendlich nahe sind, so ist ihre Differentz mR, in Ansehung ihrer, nichts (§. 4), und daher das Rectangulum PMRp dem Trapezio PMmp gleich (§. 5). Da ihr nun die Figur in unendliche solche Trapezia resolviren könnet; so ist $\int ydx$ der Inhalt der Fläche AMP.

Der 3. Zusatz.

88. Derowegen, wenn ihr aus der Gleichung für eine krumme Linie den Werth von y setzet, und ihr könnet die Differentiale der Fläche integriren, so habt ihr die Quadradratur der Fläche gefunden.

Die 2. Aufgabe.

89. **Den Inhalt eines Triangels zu finden.**

Auflösung.

Tab. IX. Fig. 75. Wenn ihr die krumme Linie AM als eine gerade ansehet, so ist AMP ein Triangel, und daher auch sein Element ydx. Setzet nun die Höhe des Triangels, von welchem x ein Theil ist, $=a$, die Grund-Linie, welche mit PM oder y parallel ist, $=b$; so ist (§. 184 *Geom.*) $a:b=x:y$, folglich

$$ay=bx$$
$$y=bx:a$$
$$ydx=bxdx:a$$
$$\int ydx=bx^2:2a \text{ (§. 82)}.$$

Wenn ihr nun den gantzen Triangel verlanget, so setzet für den Theil der Höhe x, die gantze Höhe a, und ihr findet den Inhalt $ba^2:2a=\frac{1}{2}ab$.

Anmerckung.

90. Dieses Exempel habe ich nur zu dem Ende gegeben, damit ihr sehet, daß durch die integral-Rechnung, deren Gründe den Anfängern zuerst zweifelhaft scheinen, weil man den Triangel MmR für nichts ansiehet, eben das gefunden wird, was in der gemeinen Geometrie aus andern Gründen erwiesen worden ist.

Die 3. Aufgabe.

91. **Die Parabel zuquadriren.**

Auf-

Auflösung.

In der Parabel ist $ax = y^2$

$$a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} = y$$

$$dx$$

$$ydx = a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx$$

$$\int ydx = \tfrac{2}{3} a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} = \tfrac{2}{3} \sqrt{ax^3} = \tfrac{2}{3} \sqrt{x^2 y^2}$$
$$= \tfrac{2}{3} xy.$$

Zusatz.

92. Also verhält sich der Raum in der Parabel AMP zu dem Rectangulo aus der Semiordinate PM in die Absciſſe AP, wie $\tfrac{2}{3}xy$ zu xy, das ist, wie 2 zu 3.

Die 4. Aufgabe.

93. **Unendliche Parabeln auf einmal zuquadriren.**

Auflösung.

Für unendliche Parabeln und noch andere Linien ist

$$a^m x^n = y^r$$

$$a^{m:r} x^{n:r} = y$$

$$ydx = a^{m:r} x^{n:r} dx$$

$$\int ydx = \frac{r}{n+r} a^{m:r} x^{n+r:r} = \frac{r}{n+r} yx.$$

Z. E. Es sey eine Parabel von dem andern Geschlechte, so ist $a^2 x = y^3$, daher $r = 3$, $x = 1$, folglich $\int y dx = \frac{3}{4} xy$.

Die 5. Aufgabe.

Tab. IX. Fig. 75.

94. **Das Stück von der Parabel PMNS zuquadriren.**

Auflösung.

Es sey die unveränderliche Linie AP $= b$, PS $= x$, SN $= y$, der Parameter $= a$; so ist AS $= b + x$, und (§. 217 P. I.).

$$ab + ax = y^2$$

$$\sqrt{(ab + ax)} = y$$

$$dx \sqrt{(ab + ax)} = y dx.$$

Damit man dieses Element integriren kann; so setzet

$$\sqrt{(ab + ax)} = v$$

so ist $ab + ax = v$

$$adx = 2vdv$$

$$dx = vdv : a$$

$$dx \sqrt{(ab + ax)} = 2v^2 dv : a$$

$$\int y dx = \frac{2}{3} v^3 : a = \frac{2}{3} (b + x) \sqrt{(ab + ax)}.$$

Weil

Weil x in P$=o$ wird, und auch der Raum PSNM nichts werden muß, wenn $x=o$; hingegen, wenn ihr in der gefundenen Summe $x=o$ setzet, $\frac{2}{3}b\sqrt{ab}$ übrig bleibt; so ist klar, daß ihr von dem gefundenen Werthe $\frac{2}{3}b\sqrt{ab}$ noch abziehen müsset, damit ihr den Inhalt von dem Raume PMNS$=\frac{2}{3}(b+x)\sqrt{(ab+ax)}-\frac{2}{3}b\sqrt{ab}$ bekommet. Nemlich $\frac{2}{3}(b+x)\sqrt{(ab+ax)}$ ist der gantze parabolische Raum ANS, und $\frac{2}{3}b\sqrt{ab}$ das Stück AMP; folglich der Unterscheid PMNS.

Es könte auch AS von beständiger Grösse angenommen, und x von S angerechnet werden. Wenn nun AS$=b$, SP$=x$; so ist PA$=b-x$, folglich (weil PM$=y$)

$$ab-ax=y^2$$

$$\sqrt{(ab-ax)}=y$$

$$dx\sqrt{(ab-ax)}=ydx.$$

Setzet wie vorhin,

$$ab-ax=v^2$$

so ist

$$-adx=2vdv$$

$$dx=-2vdv:a$$

$$dx\sqrt{(ab-ax)}=-2v^2dv:a$$

$$\int ydx=-\tfrac{2}{3}v^3:a=-\tfrac{2}{3}(b-x)\sqrt{(ab-ax)}.$$

Setzet ferner, wie vorhin, $x = o$; so bleibt $-\frac{2}{3}b\sqrt{ab}$ übrig, und demnach müsset ihr $\frac{2}{3}b\sqrt{ab}$ addiren, damit der Inhalt des Raums PMNS herauskommt. Nemlich $ANS = \frac{2}{3}b\sqrt{ab}$, und $APM = \frac{2}{3}(b-x)\sqrt{(ab - ax)}$; folglich $PMNS = \frac{2}{3}b\sqrt{ab} - \frac{2}{3}(b-x)\sqrt{(ab - ax)}$.

Zusatz.

95. Wenn also die Gleichung für eine krumme Linie gegeben wird, und man nicht weiß, wo x in der Axe seinen Anfang hat: so erhellet aus der Auflösung, daß man nur $x = o$ setzen darf, um zufinden, ob noch etwas zu addiren oder zu subtrahiren übrig bleibt.

Die 6. Aufgabe.

96. **Eine Linie zuquadriren, in welcher $xy^3 = a^4$.**

Auflösung.

Weil $xy^3 = a^4$;

so ist $y^3 = a^4 : x = a^4x^{-1}$

$y = a^{4:3}x^{-1:3}$

$ydx = a^{4:3}x^{-1:3}dx$

$\int ydx = \frac{3}{2}a^{4:3}x^{2:3} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{a^4x^2}$.

Die

Die 7. Aufgabe.

97. Die krumme Linie des *Cartesii* (Tom. 3 Epist. p. 219) zuquadriren, in welcher $b^2 : x^2 = b - x : y$.

Auflösung.

Weil $b^2y = bx^2 - x^3$

so ist $y = (bx^2 - x^3) : b^2$

$ydx = (bx^2dx - x^3dx) : b^2$

$\int ydx = x^3 : 3b - x^4 : 4b^2$.

Die 8. Aufgabe.

98. Die krumme Linie zuquadriren, deren Gleichung ist $x^5 + ax^4 + a^2x^3 + a^3x^2 + a^5 = a^4y$.

Auflösung.

Weil $y = x^5 : a^4 + x^4 : a^3 + x^3 : a^2 + x^2 : a + a$

so ist $ydx = (x^5:a^4 + x^4:a^3 + x^3:a^2 + x^2:a + a)dx$, $\int ydx = x^6 : 6a^4 + x^5 : 5a^3 + x^4 : 4a^2 + x^3 : 3a + ax$.

Die 9. Aufgabe.

99. Eine krumme Linie zuquadriren, in welcher $y^2 = x^4 + a^2x^2$.

Auflösung.

Weil $y^2 = x^4 + a^2x^2$;

so ist $y = \sqrt{(x^4 + a^2x^2)} = x\sqrt{(x^2 + a^2)}$

$ydx = xdx\sqrt{(x^2 + a^2)}$.

Damit dieses Element zu dem Integriren geschickt werde, so setzet

$x^2 + a^2 = v^2$,

so ist $2xdx = 2vdv$

$xdx + \sqrt{(a^2 + x^2)} = v^2dv$

$\int xdx \sqrt{(x^2 + a^2)} = \frac{1}{3}v^3 = \frac{1}{3}(x^2 + a^2)\sqrt{(x^2 + a^2)}$.

Setzet nun $x = o$, so bleibt $\frac{1}{3}a^3$ übrig. Solchergestalt ist $\int ydx = \frac{1}{3}(x^2 + a^2)\sqrt{(x^2 + a^2)} - \frac{1}{3}a^3$ (§. 94).

Die 10. Aufgabe.

100. **Eine krumme Linie zuquadriren, in welcher $y^2 = x^3 + ax^2$.**

Auflösung.

Weil $y^2 = x^3 + axx$;

so ist $y = x\sqrt{(x + a)}$

$ydx = xdx \sqrt{(x + a)}$.

Damit dieses Element zu dem Integriren geschickt werde, so setzet

$x + a = v^2$

so ist $x = v^2 - a$

$dx = 2vdv$

$xdx \sqrt{(x + a)} = 2v^4dv - 2av^2dv$

$\int xdx \sqrt{(x + a)} = \frac{2}{5}v^5 - \frac{2}{3}av^3 = (\frac{2}{5}(xx + 2ax + aa)$
$- \frac{2}{3}$

$-\frac{2}{3}(ax+aa))\sqrt{(x+a)}=(\frac{6}{15}(xx+2ax+aa)-\frac{10}{15}(ax+aa))\sqrt{(x+a)}=(6x^2+2ax-4aa)\sqrt{(x+a)}:15+\frac{4}{15}a^2\sqrt{a}$ (§. 94).

Die 11. Aufgabe.

101. **Eine krumme Linie zuquadriren, in welcher** $y^2=x^2:(x+a)$.

Auflösung.

Weil $y^2=x^2:(x+a)$,

so ist $y=x:\sqrt{(x+a)}$

$ydx=xdx:\sqrt{(x+a)}$.

Setzet $\sqrt{(x+a)}=v$;

so ist $x+a=v^2$

$x=v^2-a$

$dx=2vdv$

$$xdx:\sqrt{(x+a)}=(2v^3dv-2avdv):v$$
$$=2v^2dv-2adv,$$

$\int xdx:\sqrt{(x+a)}=\frac{2}{3}v^3-2av=(\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}a-2)\sqrt{(x+a)}=(\frac{2}{3}x-\frac{4}{3}a)\sqrt{(x+a)}=\sqrt{(4x^3-12ax+16a^3:9)}=\frac{2}{3}\sqrt{(x^3-3axx+4a^2}-\frac{4}{3}a\sqrt{a}$ (§. 94).

Die

Die 12. Aufgabe.

102. **Die Hyperbel zwischen ihren Asymptoten zuquadriren.**

Auflösung.

Für die Hyperbel zwischen ihren Asymptoten ist

$$a^2 = by + xy \text{ (§. 287 P. I.).}$$

daher $a^2 : (b + x) = y$

$$ydx = a^2 dx : (b + x).$$

Damit dieses Element zu dem Integriren geschickt werde, so dividiret in der That

$$b + x) \; a^2 \left\{ \frac{a^2}{b} - \frac{a^2 x}{b^2} + \frac{a^2 x^2}{b^3} - \frac{a^2 x^3}{b^4} \text{ \&c.} \right.$$

$$\begin{array}{ll} & a^2 + a^2 x : b \\ \hline b + x) & - a^2 x : b \\ & - a^2 x : b - a^2 x^2 : b^2 \\ \hline b + x) & + a^2 x^2 : b^2 \\ & + a^2 x^2 : b^2 + a^2 x^3 : b^3 \\ \hline b + x) & - a^2 x^3 : b^3. \end{array}$$

Denn ist $a^2 dx : (b + x) = \frac{a^2 dx}{b} - \frac{a^2 x dx}{b^2} + \frac{a^2 x^2 dx}{b^3} - \frac{a^2 x^3 dx}{b^4}$ u. s. w. unendlich fort.

Folg-

Folglich habt ihr $\int ydx = \frac{a^2x}{b} - \frac{a^2x^2}{2b^2} + \frac{a^2x^3}{3b^3} - \frac{a^2x^4}{4b^4}$ u. s. w. unendlich fort, das ist, wenn ihr $a = b = 1$ setzet, $x = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4$ &c.

Anmerckung.

103. Diese Quadratur der Hyperbel hat zuerst *Nic. Mercator* in seiner Logarithmotechnia gegeben, welcher die unendlichen Reihen zu Quadrirung der Figuren zuerst gebraucht hat, welche man nicht genau quadriren kan.

Die 13. Aufgabe.

104. **Den Circul zuquadriren.**

Auflösung.

Die Gleichung für den Circul ist

$$y^2 = a^2 - x^2 \quad (\S. 198 \text{ P. I.})$$

$$y = \sqrt{(a^2 - x^2)}$$

$$ydx = dx\sqrt{(a^2 - x^2)}.$$

Ziehet aus $\sqrt{(a^2 - x^2)}$ die Wurtzel, so findet ihr (§. 97 P. I.) $ydx = adx - \frac{x^2dx}{2a} - \frac{x^4dx}{8a^3} - \frac{x^6dx}{16a^5} - \frac{5x^8dx}{128a^7}$ u. s. w. unendlich fort,

dessen

dessen Integrale $ax - \frac{x^3}{6a} - \frac{x^5}{40a^3} - \frac{x^7}{112a^5} - \frac{5x^9}{1152a^7}$ u. s. w. unendlich fort den Theil des Circuls BNP ausdruckt.

Tab. X. Fig. 84.

Wenn ihr für x den halben Diameter a setzet, so kommt der Werth des Quadranten $a^2 - \frac{a^2}{6} - \frac{a^2}{40} - \frac{a^2}{112} - \frac{5a^2}{1152}$ u. s. w. Setzet $a = \frac{1}{2}$, so ist $a^2 = \frac{1}{4}$, und demnach der gantze Circul $1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40} - \frac{1}{112} - \frac{5}{1152}$ u. s. w. unendlich fort.

Anders.

Tab. II. Fig. 15.

Es sey CB der Tangens des halben Bogens GB $= x$, der halbe Diameter BA $= a$, so ist BD der Tangens des gantzen Bogens BG $= 2aax : (ad - xx)$ (§. 190 P. I.), folglich DA $= (a^3 + ax^2) : (aa - xx)$ (§. *cit.*). Nun ist (§. *185 Geom.*) DA : DB $=$ GA : GH, und AD · AB $=$ AG : AH: darum findet ihr GH $= 2a^2x : (a^2 + x^2)$, und AH $= (a^3 - ax^2) : (aa + xx)$, endlich BH $=$ AB $-$ AH $= 2ax^2 : (aa + xx)$. Wenn ihr der beyden differential-Grössen von GH und BH, nemlich $(2a^4dx - 2a^2x^2dx) : (a^2 + x^2)^2$ und $4a^3xdx : (a^2 + x^2)^2$, Quadrate $(4a^8dx^2 - 8a^6x^2dx^2 + 4a^4x^4dx^2) : (a^2 + x^2)^4$ und $16a^6x^2dx^2 : (a^2 + x^2)^4$ zusam-

zusammen setzet, und aus der Summe $(4a^8dx^2 + 8a^6x^2dx^2 + 4a^4x^4dx^2) : (a^2 + x^2)^4$ die quadrat-Wurtzel $(2a^4dx^2 + 2a^2x^2dx) : (a^2 + x^2)^2 = 2a^2dx : (a^2 + x^2)$ ziehet; so habt ihr die Differentiale des Bogens GB. Multipliciret diese in den halben Radium oder $\frac{1}{2}a$; so kommt das Element des Sectoris BGA (§. 171 *Geom.*) heraus $a^3dx : (a^2 + x^2)$. Setzet $a = 1$; so ist das Element $dx : (1 + x^2)$. Nun findet ihr durch die gemeine Division, wie in der vorhergehenden Aufgabe (§. 102) $1 : (1 + x^2) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10}$ u. s. w. unendlich fort, und folglich $\int dx : (1 + x^2) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11}$ u. s. w. unendlich fort. Diese unendliche Reihe ist für den Ausschnitt BAG, dessen halben Bogens Tangens BC $= x$ ist. Nun ist der Tangens des halben Quadranten dem Radio gleich. Derowegen, wenn ihr $x = 1$ setzet, so ist $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$ u. s. w. unendlich fort der Inhalt des Quadranten. Nehmet ihr endlich den Diameter des Circuls 1 an; so ist eben selbige unendliche Reihe der Inhalt des gantzen Circuls.

Anmerckung.

105. Die erste Reihe für den Circul hat der Herr *Newton;* die andere der Herr von Leibnitz gefunden, und ist auch schon vorher *Jacob Gregorius* darauf

auf gekommen, ob er sie gleich nicht in Schrifften publiciret hat.

Die 14. Aufgabe.

Tab. III. Fig. 27.

106. **Die Ellipsin zuquadriren.**

Auflösung.

Es sey AC $= a$, DC $= b$, PC $= x$, PM $= y$; so ist AP $= a - x$, PB $= a + x$, und aus der Natur der Ellipsis

AP.PB : AC² = PM² : CD² (§. 251 P.I.)

$aa - xx : aa = yy : bb$

$aayy = bb(aa - xx)$

$y = b\sqrt{(aa - xx)} : a$

$ydx = bdx\sqrt{(aa - xx)} : a.$

Nun ist $\sqrt{(aa - xx)} = a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7}$ u. s. w. unendlich fort (§. 97 P. I.).

Derowegen ist $bdx\sqrt{(aa - xx)} : a = bdx - \frac{bx^2dx}{2a^2} - \frac{bx^4dx}{8a^4} - \frac{bx^6dx}{16a^6} - \frac{5bx^8dx}{128a^8}$ u. s. w. unendlich fort. Folglich ist $\int ydx = bx - \frac{bx^3}{6a^2} - \frac{bx^5}{40a^4} - \frac{bx^7}{112a^6} - \frac{5bx^9}{1152a^8}$ u. s. w. unendlich fort.

Wenn ihr für x die halbe Axe a setzet, so bekommet ihr für den Quadranten der El-

Ellipsis $ab - \frac{1}{6}ab - \frac{1}{40}ab - \frac{1}{112}ab - \frac{5}{1152}ab$ u. s. w. unendlich fort, und also für die gantze Ellipsin eben dieselbe Reihe, wenn ihr a für die gantze große, und b für die gantze kleine Axe annehmet.

Der 1. Zusatz.

107. Wenn ihr $\sqrt{ab} = 1$ setzet, so kommt die Reihe für den Circul $1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40} - \frac{1}{112} - \frac{5}{1152}$ u. s. w. heraus (§. 104). Derowegen ist die Ellipsis einem Circul gleich, dessen Diameter die mittlere proportional-Linie ist zwischen seiner kleinen und großen Axe, und also verhält sich die Ellipsis zu dem Circul, welcher mit der großen Axe beschrieben wird, wie die kleine Axe zu der großen.

Der 2. Zusatz.

108. Daher dependiret die Quadratur der Ellipsis von der Quadratur des Circuls.

Die 1. Anmerckung.

109. Die Quadratur des Circuls, der Ellipsis und Hyperbel hat noch niemand durch einen endlichen Werth gegeben.

Die 2. Anmerckung.

110. Aus der gefundenen Quadratur der Ellipsis läßt sich nun ferner der Lehrsatz erweisen, welchen wir in der Astronomie (§. 419) angenommen haben, daß nemlich der Sector des Circuls KAP sich zu dem Sectore CAP verhalte, wie der Circul zu der Ellipsi. Denn es ist klar, daß CLP sich zu KLP verhalte, wie $\frac{b}{a}\int dx \sqrt{(a^2 - x^2)}$ zu $\int dx \sqrt{(a^2 - x^2)}$ (§. 104, 106),

Tab. X. Fig. 85.

folglich wie b zu a (§. 144 P. I.), oder RE zu DR. Die Triangel aber CAL und KAL verhalten sich, wie CL zu KL (§ 176 Geom.), oder wie RE zu DR, folglich so wohl sie als die Abschnitte PLC und PLK wie die Ellipsis zu dem Circul (§. 107). Folglich ist KAL+KLP zu CAL+CLP wie der Circul zu der Ellipsi (§. 142 P. I.).

Die 3. Anmerckung.

111. Daß aber LC : LK = RE : DR, läßt sich leicht erweisen. Denn vermöge der gegenwärtigen Aufgabe ist $LC = b\sqrt{(aa-xx)}:a$, und $LK = \sqrt{(aa-xx)}$. Daher $LC : LK = b\sqrt{(aa-xx)} : a\sqrt{(aa-xx)} = b : a =$ RE : DR.

Die 15. Aufgabe.

Tab. IX. Fig. 81.

112. **Den Raum HPMI zwischen der logarithmischen Linie MI und ihrer Axe PH zufinden.**

Auflösung.

Es sey $PM = y$, $Pp = dx$, der Subtangens $= a$ (§. 61); so ist $ydx : dy = a$.

$$ydx = ady$$

$$\int ydx = ay.$$

Der 1. Zusatz.

113. Setzet $QS = z$, so ist $HQIS = az$, folglich $PQSM = ay - az = a(y-z)$, das ist, dem Rectangulo aus dem Subtangente in die Differentz der Semiordinaten PM und QS.

Der

Der 2. Zusatz.

114. Derowegen verhalten sich die Räume zwischen beyden Semiordinaten, wie ihre Differentzen.

Die 16. Aufgabe.

115. **Die spiral-Linie zuquadriren.**

Tab. IX. Fig. 78.

Auflösung.

Es sey alles, wie in der 6. Aufgabe (§. 52), so ist EG $= ydx : a$, folglich der kleine Sector EAG oder das Element der Fläche $y^2dx : 2a$. Nun ist für die spiral-Linie (*§. 312 P. I.*).

$$ax = by$$

$$a^2x^2 : b^2 = y^2$$

$$y^2dx : 2a = ax^2dx : 2bb$$

$$\int y^2dx : 2a = ax^3 : 6bb.$$

Wenn ihr für x die gantze Peripherie b setzet, so kommt für den Raum, welchen die gantze spiral-Linie einschliesset, $\frac{1}{6}ab$.

Der 1. Zusatz.

116. Da nun der umschriebene Circul $\frac{1}{2}ab$ ist, so verhält sich die spiral-Fläche zu ihm, wie $\frac{1}{6}ab$ zu $\frac{1}{2}ab$, das ist, wie 1 zu 3 (*§. 144 P. I.*).

Der 2. Zusatz.

117. Für unendliche spiral-Linien ist

$$a^m x^n = b^n y^m \text{ (§. 312 P. I.)}$$

$$a x^{n:m} : b^{n:m} = y$$

$$a^2 x^{2n:m} : b^{2n:m} = y^2$$

$$\int y^2 dx : 2a = max^{2n+m,:m} : (4n+2m) b^{2n:m}$$

Wenn ihr nun für x die gantze Peripherie b setzet, so bekommet ihr $mab^{2n+m,:m} : (4n + 2mb)^{2n:m} = mab : (4n + 2m)$.

Der 3. Zusatz.

118. Dannenhero verhält sich überhaupt die spiral-Fläche zu dem umschriebenen Circul, wie $mab : (4n+2m)$ zu $\frac{1}{2}ab$, das ist, wie $2m$ zu $4n+2m$, oder wie m zu $2n+m$.

Der 4. Zusatz.

Tab. IX. Fig. 78.

119. Setzet, daß der Bogen BC sich zu EC verhalten solle, wie die Abscisse in einer algebraischen Linie zu ihrer Semiordinate.

Und es sey der Bogen BC $= x$, AE $= y$, AC $= r$; so ist EC $= r - y$, CD $= dx$ und

$$\begin{array}{cccc} AC : & CD = & AE : & EG \\ r & dx & y & ydx : r \end{array}$$

folglich das Element oder der Sector AEG
$\frac{1}{2}y^2$

$\frac{1}{2}y^2dx:r$. Setzet nun, es sey BC die Abscisse, EC die Semiordinate einer Parabel, so ist

$$ax = r^2 - 2ry + yy$$
$$dx = (2ydy - 2rdy) : a$$
$$\frac{1}{2}y^2dx : r = (y^3dy - ry^2dy) : ar$$
$$\int \frac{1}{2}y^2dx : r = y^4 : 4ar - y^3 : 3a.$$

Der 5. Zusatz.

120. Ihr könnet auch den Raum BFC finden, wenn ihr das Element GDCE suchet, welches ihr findet, wenn ihr CD + EG mit $\frac{1}{2}$FC multipliciret (*§. 157 Geom.*), weil ihr es als ein Trapezium ansehen könnet, dessen bases CD und EG parallel sind. Nun ist CD + EG = $dx + ydx : r$, und $\frac{1}{2}$EC = $\frac{1}{2}r - \frac{1}{2}y$. Derowegen das verlangte Element $(r^2dx - y^2dx) : 2r$. Nehmet nun, wie in dem vorigen Exempel (§. 119), $dx = (2ydy - 2rdy) : a$, so ist das besondere Element $(ry^2dy + r^2ydy - y^3dy - r^3dy) : ar$, dessen Integrale $y^3 : 3a + ry^2 : 2a - y^4 : 4ar - r^2y : a$ den verlangten Raum giebt.

Tab. IX. Fig. 78.

Die 17. Aufgabe.

121. **Die Fläche eines jeden Cörpers zufinden, welcher erzeuget wird, indem eine krumme Linie sich um ihre Axe bewegt.**

Tab. IX. Fig. 75.

Auflösung.

Setzet die Verhältniß des halben Diameters zu der Peripherie $= r : c$, die Abscisse AP $= x$, die Semiordinate PM $= y$, so ist Pp $= dx$, mR $= dy$, Mm $= \surd(dx^2 + dy^2)$ (§. *172 Geom.*) und die Peripherie, welche mit PM beschrieben wird, $= cy : r$. Daher das Element der Fläche $cy \surd(dx^2 + dy^2) : r$. Wenn ihr nun für dx^2 oder dy^2 seinen Werth aus der gegebenen Gleichung für die krumme Linie setzet, und das Element hernach integriret; so kommt der Inhalt eines Stücks von der verlangten Fläche heraus.

Der 1. Zusatz.

Tab. IX. Fig. 75.

122. Es sey AMP ein Triangel, dessen Höhe $= a$, die Grundlinie $= r$, so ist $ay = rx$ (§. *184 Geom.* & §. *137 P. I. Algebr.*), und dannenhero

$$ady : r = dx$$

$$a^2dy^2 : r^2 = dx^2$$

$$cy\surd(dx^2 + dy^2) : r = cy\surd(a^2dy^2 + r^2dy^2) : r^2$$

$$cy\surd(dx^2 + dy^2) : r = cydy\surd(a^2 + r^2) : r^2$$

$$\int cy\surd(dx^2 \surd dy^2) : r = cy^2\surd(a^2 + r^2) : 2r^2.$$

Setzet für y die Grund-Linie r: so kommt die Fläche des Coni heraus $\frac{1}{2}c\surd(r^2 + a^2)$. Da nun

nun $\sqrt{(r^2 + a^2)}$ seine Seite ist: so sehet ihr, daß die Kegel-Fläche einem Triangel gleich sey, dessen Grund-Linie die Peripherie der Grund-Fläche des Kegels und die Höhe seiner Seite gleich ist.

Der 2. Zusatz.

123: Wenn ihr für die beschreibende Linie einen halben Circul annehmet, so findet ihr die Kugel-Fläche. Da nun im Circul.

$$2rx - xx = y^2$$

so ist $2rdx - 2xdx = 2ydy$

$$(rdx - xdx) : ydy$$

$$(r^2dx^2 - 2rxdx^2 + x^2dx^2) : y^2 = dy^2$$

$cy\sqrt{(dx^2 + dy^2)} : r = cy\sqrt{((dx^2 + (r^2dx^2 - 2rxdx^2 + x^2dx^2) : (2rx - xx)) : r} = cy\sqrt{((2rxdx^2 - x^2dx^2 + r^2dx^2 - 2rxdx^2 + x^2dx^2) : (2rx - xx)) : r} = cy\sqrt{(r^2dx^2 : y^2)} : r = cyrdx : ry = cdx.$

$$\int cdx = cx.$$

Setzet für x den Diameter $2r$, so ist die gantze Kugel-Fläche $2cr$.

Der 3. Zusatz.

124. Da nun die Fläche des grösten Circuls $\frac{1}{2}cr$; so ist die Fläche der Kugel vier-

mal so groß als ihr größter Circul. Hingegen jedes Stück der Kugel-Fläche verhält sich zu der gantzen, wie cx zu $2cr$, das ist, wie x zu $2r$, oder die Höhe des Stücks der Kugel zu dem gantzen Diameter.

Der 4. Zusatz.

125. Es sey die beschreibende Linie eine Parabel, so findet ihr die Fläche eines parabolischen After-Kegels. Da nun in der Parabel

$$adx = 2ydy$$

so ist $dx^2 = 4y^2dy^2 : a^2$

$$cy\sqrt{(dx^2 + dy^2)} : r = cy\sqrt{(4y^2dy^2 + a^2dy^2, : a^2)} : r = cydy\sqrt{(4yy + aa)} : ar.$$

Setzet $\sqrt{(4yy + aa)} = v$

so ist $4yy + aa = v^2$

$$8ydy = 2vdv$$

$$cydy\sqrt{(4yy + aa)} : ar = cv^2dv : 4ar$$

$$\int cv^2dv : 4ar = cv^3 : 12ar = (4cyy + caa)\sqrt{(4yy + aa)} : 12ar - ca^2 : 12r \text{ (§. 94).}$$

Setzet r für y, so habt ihr die Fläche des gantzen After-Kegels $(4crr + caa)\sqrt{(4rr + aa} : 12ar - ca^2 : 12r$.

Von

Von der Rectification der krummen Linien.

Die 4. Erklärung.

126. **Eine krumme Linie rectificiren heißt so viel, als die Länge derselben finden.**

Der 1. Zusatz.

127. Wenn die beyden Semiordinaten PM und pm einander unendlich nahe sind, so ist der Bogen Mm das Element des Bogens AM, das ist, $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$.

Tab. IX. Fig. 75.

Der 2. Zusatz.

128. Derowegen, wenn ihr vor dx^2 oder dy^2 den Werth aus der Natur der krummen Linie setzet, und das besondere Element integriret; so habt ihr die krumme Linie oder ihren Bogen rectificiret.

Der 3. Zusatz.

129. Ihr könnet auch das Element Mm finden, wenn ihr setzet PM : TM = dy : Mm.

Die 18. Aufgabe.

130. **Die Parabel zurectificiren.**

Auflösung.

In der Parabel ist $ax = y^2$

$$adx = 2ydy$$

$$a^2dx^2 = 4y^2dy^2$$

$$dx^2 = 4y^2dy^2 : a^2$$

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{(dy^2 + 4y^2dy^2 : a^2)}$$

das ist, $= dy\sqrt{(aa + 4y^2)} : a$.

Damit ihr nun dieses Element integriren könnet, so ziehet (§. 95 P. I.) die Wurzel aus $(aa + 4y^2)$. Es ist nemlich

$n = 2,\ m = 1,\ P = a^2,\ Q = 4y^2 : a^2$

$P^{m:n} = + a = A$

$\frac{m}{n} AQ = \frac{1}{2}a.4y^2 : a^2 = + 2y^2 : a = B$

$\frac{m-n}{2n} BQ = -\frac{1}{2}y^2 : a.4y^2 : a^2 = -2y^4 : a^3 = C$

$\frac{m-2n}{3n} CQ = -\frac{3}{6} - 2y^4 : a^3.4y^2 : a^2 = + 4y^6 : a^5 = D$

$\frac{m-3n}{4n} DQ = -\frac{5}{8} 4y^6 : a^5.4y^2 : a^2 = -10y^8 : a^7$

u. s. w. unendlich fort.

Demnach ist $\sqrt{(aa + 4y^2} = a + \frac{2y^2}{a} - \frac{2y^4}{a^3} + \frac{4y^6}{a^5} - \frac{10y^8}{a^7}$ &c. und daher $dy\sqrt{(aa}$

+ 4

$+ 4y^2) : a = dy + \frac{2y^2dy}{a^2} - \frac{2y^4dy}{a^4} + \frac{4y^6dy}{a^6}$
$- \frac{10y^8dy}{a^8}$ &c. Deren Integral $y + \frac{2y^3}{3a^2} -$
$\frac{2y^5}{5a^4} + \frac{4y^7}{7a^6} - \frac{10y^9}{9a^8}$ &c. Die Länge des
Bogens exprimiret.

Die 19. Aufgabe.

131. **Die Parabel zurectificiren, in welcher $ax^2 = y^3$.**

Auflösung.

Weil $ax^2 = y^3$

so ist $2axdx = 3y^2dy$

$4a^2x^2dx^2 = 9y^4dy^2$

$dx^2 = 9y^4dy^2 : 4a^2x^2 = 9ydy^2 : 4a$

$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{((9ydy^2 + 4ady^2) : 4a)} = dy\sqrt{((9y + 4a) : 4a)}$.

Setzet $\sqrt{((9y + 4a) : 4a)} = v$

so ist $9y + 4a = 4av^2$

$9dy = 8avdv$

dy

$$dy\sqrt{(9y + 4a, : 4a)} = \tfrac{8}{9}av^2dv$$

$\int dy\sqrt{(9y + 4a, : 4a)} = \frac{8}{27}av^3 = \frac{8}{27}(9y + 4, : 4)\sqrt{(9y + 4, : 4)} = \frac{2}{27}(9y + 4)\frac{1}{2}\sqrt{(9y + 4)} = \frac{1}{27}(9y + 4)\sqrt{(9y + 4)} - \frac{8}{27}$ (§. 94), wenn $y = 0$.

Die 20. Aufgabe.

132. Unendliche Parabeln zurectificiren.

Auflösung.

Für unendliche Parabeln ist

$y^n = a^{n-1}x = x$, wenn $a = 1$.

$ny^{n-1}dy = dx$

$n^2y^{2n-2}dy^2 = dx^2$

$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{(n^2y^{2n-2}dy^2 + dy^2)} = dy\sqrt{(n^2y^{2n-2} + 1)}$.

Ziehet nun aus $(1 + n^2y^{2n-2})$ die Wurzel (§. 95 P. I.), und setzet, der Kürze halber, $2n - 2 = r$, so ist in dem Newtonischen Lehrsatze $m = 1$, $n = 2$, $P = 1$, $Q = n^2y^r$.

$P^{m:n} = 1 = A$.

$\frac{m}{n}AQ = \frac{1}{2}n^2y^r = B$.

$m - n$

$\frac{m-n}{2n} BQ = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} n^2 y^r \cdot \frac{1}{8} n^2 y^r = - n^4 y^{2r} = C.$

$\frac{m-2n}{3n} CQ = -\frac{3}{6} \cdot -\frac{1}{8} n^4 y^{2r} \cdot n^2 y^r = +\frac{1}{16} n^6 y^{3r} = D.$

$\frac{m-3n}{4n} DQ = -\frac{5}{8} \cdot \frac{1}{16} n^6 y^{3r} \cdot n^2 y^r = -\frac{5}{128} n^8 y^{4r} = E$ &c.

Demnach ist $dy \sqrt{(1 + n^2 y^{2n-2})} = dy + \frac{1}{2} n^2 y^r dy - \frac{1}{8} n^4 y^{2r} dy + \frac{1}{16} n^6 y^{3r} dy - \frac{5}{128} n^8 y^{4r} dy$ u. s. w. unendlich fort, dessen Integral $y + \frac{n^2 y^{r+1}}{2(r+1)} - \frac{n^4 y^{2r+1}}{8(2r+1)} + \frac{n^6 y^{3r+1}}{16(3r+1)} - \frac{5 n^8 y^{4r+1}}{128(4r+1)}$ u. s. w. unendlich fort, die Länge unendlicher Parabeln ausdruckt. Wollet ihr für r seinen Werth $2n-2$ in die Stelle setzen, so bekommet ihr $y + \frac{n^2 y^{2n-1}}{2(2n-1)} - \frac{n^4 y^{4n-3}}{8(4n-3)} + \frac{n^6 y^{6n-5}}{16(6n-5)} - \frac{5 n^8 y^{8n-7}}{128(8n-7)}$ &c. Es sey z. E. $n = 2$, so bekommet ihr $y + \frac{4y^3}{3.2} - \frac{16y^5}{8.5} + \frac{4.16y^7}{16.7}$, &c. das ist, $y + \frac{2y^3}{3} - \frac{2y^5}{5} + \frac{4y^7}{7}$ &c. für die Apollonische Parabel,

rabel, welche Reihe mit der oben gefundenen übereinkommt, wenn ihr $a = 1$ setzet.

Die 21. Aufgabe.

133. **Aus dem gegebenen Tangente eines Circul-Bogens den Bogen zufinden.**

Auflösung.

Tab. IX. Fig. 76.

Es sey der Tangens $KB = x$, $BC = 1$, so ist $SK = dx$, $KC = \sqrt{(1 + xx)}$, $SL = xdx : \sqrt{(1 + xx)}$, wenn nemlich KC und SC einander unendlich nahe sind. Da nun bey L und B rechte Winckel sind (§. 48), und $BKC = KSL$, weil KCL unendlich klein ist (§. 101 *Geom.*); so ist $KC : BC = SK : KL$ (§. 163 *Geom.*), das ist:

$$\sqrt{(1 + x^2)} : 1 = dx : \frac{dx}{\sqrt{(1 + x^2)}}.$$

Ferner $KC : KL = NC : Nn$ (§. 163 *Geom.*)

$$\sqrt{(1 + x^2)} : \frac{dx}{\sqrt{(1 + x^2)}} = 1 : \frac{dx}{1 + x^2}.$$

Wenn ihr nun dx durch $1 + x^2$ würcklich dividiret, so bekommet ihr für das Element Nn des Bogens BN, $dx - x^2dx + x^4dx - x^6dx + x^8dx - x^{10}dx$ u. s. w. unendlich fort, dessen Integral $x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 - \frac{1}{11}x^{11}$ u. s. w. unendlich fort den

den Bogen BN exprimiret, dessen Tangens BK $= x$.

Der 1. Zusatz.

134. Der Tangens des Bogens von 45° ist dem Radio BC gleich, und also wird $x =$ 1, folglich der Bogen von 45° oder der halbe Quadrant $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$ &c. Setzet ihr aber den gantzen Diameter eins, so ist der Quadrant $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$ &c.

Der 2. Zusatz.

135. Derowegen verhält sich das Quadrat des Diameters zu der Circul-Fläche, wie der Diameter zu dem Quadranten von der Peripherie (§. 104).

Anmerckung.

136. Ihr hättet auf eben diese Art den Circul quadriren können (§. 104).

Die 22. Aufgabe.

137. **Aus dem gegebenen Bogen eines Circuls, welcher kleiner ist als ein Quadrant, den Tangentem zufinden.**

Auflösung.

Wenn der Tangens x ist, so ist der Bogen $v = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7$ &c. (§. 133).

Setzet $x = av + bv^3 + cv^5 + dv^7$ &c. weil nun

$$- v + x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 \text{ \&c.} = o, \text{ und}$$

$x^3 =$

$$\left.\begin{array}{l} x^3 = a^3v^3 + 3a^2bv^5 + 3ab^2v^7 \text{ \&c.} \\ \qquad\qquad\qquad\quad + 3a^2cv^7 \text{ \&c.} \\ x^5 = \quad + a^5v^5 + 5a^4bv^7 \text{ \&c.} \\ x^7 = \qquad\qquad + a^7 v^7 \text{ \&c.} \end{array}\right\} (\text{§. 91. P. I.}).$$

so ist

$$\begin{array}{l} -v = -v \\ x = av + bv^3 + cv^5 + dv^7 \text{ \&c.} \\ -\frac{1}{3}x^3 = -\frac{1}{3}a^3v^3 - a^2bv^5 - ab^2v^7 \text{ \&c.} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad - a^2cv^7 \text{ \&c.} \\ +\frac{1}{5}x^5 = \qquad + \frac{1}{5}a^5v^5 + a^4bv^7 \text{ \&c.} \\ -\frac{1}{7}x^7 = \qquad\qquad - \frac{1}{7}a^7v^7 \text{ \&c.} \end{array}$$

demnach

$$\frac{a - 1 = 0}{a = 1} \qquad \frac{b - \frac{1}{3} = 0}{b = \frac{1}{3}} \qquad \frac{c - a^2b + \frac{1}{5}a^5 = 0}{c = b - \frac{1}{5} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5}}$$

$$= \frac{5 - 3}{15} = \frac{2}{15}$$

$$\frac{d - ab^2 - a^2c + a^4b - \frac{1}{7}a^7 = 0}{d = b^2 + c + \frac{1}{7} - b = \frac{1}{9} + \frac{2}{15} + \frac{1}{7} - \frac{1}{3}}$$

$$= \frac{2}{15} + \frac{1}{7} - \frac{2}{9} = \frac{126 + 135 - 210}{945} = \frac{51}{945}$$

$$= \frac{17}{315}.$$

Setzet nun diese gefundenen Werthe für a, b, c, d, &c. in die angenommene Reihe für den

den Tangentem; so bekommet ihr $x = v + \frac{1}{3}v^3 + \frac{2v^5}{15} + \frac{17v^7}{315}$ &c.

Die 23. Aufgabe.

138. **Aus dem gegebenen Sinu eines Bogens den Bogen, welcher kleiner als ein Quadrant ist, zufinden.**

Auflösung.

Wenn der halbe Diameter des Circuls r, der Sinus des Bogens, oder die Semiordinate y, der Sinus versus oder die Abscisse x ist; so ist die Aequation des Circuls

$$2rx - xx = yy$$

daher $$2rdx - 2xdx = 2ydy$$

$$dx = ydy : (r - x)$$

$$dx^2 = y^2dy^2 : (r^2 - 2rx + xx)$$

das ist, $$= y^2dy^2 : (r^2 - y^2)$$

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{(y^2dy^2 + r^2dy^2 - y^2dy^2)} : \sqrt{(r^2 - y^2)} = rdy : \sqrt{(r^2 - y^2)}.$$

Damit dieses Element des Bogens zu dem Integriren geschickt werde, so ziehet aus $1 : (r^2 - y^2)$ die Wurtzel in der That (§. 95 P. I.). Es ist aber $m = -1$, $n = 2$, $P = r^2$, $Q = -y^2 : r^2$.

$P^{m:n} = r^{-1} = 1 : r = A.$

$\frac{m}{n}AQ = -\frac{\frac{1}{2}.1.}{r} - \frac{y^2}{r^2} = + \frac{y^2}{2r^3} = B.$

$\frac{m-n}{2n}BQ = -\frac{\frac{3}{4}.y^2.}{2r^3} - \frac{y^2}{r^2} = + \frac{3y^4}{8r^3} = C.$

$\frac{m-2n}{3n}CQ = -\frac{\frac{5}{6}.3y^4.}{8r^5} - \frac{y^2}{r^2} = + \frac{5y^6}{16r^7} = D.$

$\frac{m-3n}{4n}DQ = -\frac{\frac{7}{8}.5y^6.}{16r^7} - \frac{y^2}{r^2} = + \frac{35y^8}{128r^9} = E.$

u. s. w. unendlich fort.

Also ist $rdy(r^2-y^2)^{-1:2} = dy + \frac{y^2dy}{2r^2} + \frac{3y^4dy}{8r^4} + \frac{5y^6dy}{16r^6} + \frac{35y^8dy}{128r^8}$ &c. dessen Integrale $y + \frac{y^3}{6r^2} + \frac{3y^5}{40r^4} + \frac{5y^7}{112r^6} + \frac{35y^9}{1152r^8}$ &c. den verlangten Bogen durch seinen Sinum ausdruckt. Wenn ihr besser sehen wollet, wie die Reihe unendlich fortgeht, so nennet das erste Glied A, das andere B, das dritte C u. s. w. so findet ihr $y + \frac{1.1.y^2A}{2.3r^2} + \frac{3.3.y^2B}{4.5r^2} + \frac{5.5y^2C}{6.7r^2} + \frac{7.7y^2D}{8.9r^2} + \frac{9.9y^2E}{10.11r^2}$ &c.

Zu-

Zusatz.

139. Weil der Bogen $v = y + \frac{y^3}{6r^2} + \frac{3y^5}{40r^4} + \frac{5y^7}{112r^6} + \frac{35y^9}{1152r^8}$ &c. so findet ihr, wie in der 22. Aufgabe (§. 137) $y = v - \frac{v^3}{6r^2} + \frac{v^5}{120r^4} - \frac{v^7}{5040r^6} + \frac{v^9}{362880r^8}$ &c. $= \frac{v}{1} - \frac{v^3}{1.2.3r^2} + \frac{v^5}{1.2.3.4.5r^4} - \frac{v^7}{1.2.3.4.5.6.7r^6} + \frac{v^9}{1.2.3.4.5.6.7.8.9r^8}$ &c. das ist, wenn ihr das erste Glied A, das andere B, das dritte C &c. setzet, $y = \frac{v - v^2A}{2.3r^2} + \frac{v^2B}{4.5r^2} - \frac{v^2C}{6.7r^2} + \frac{v^2D}{8.9r^2}$ &c.

Die 24. Aufgabe.

140. **Aus dem gegebenen Sinu verso den Bogen des Circuls zufinden.**

Auflösung.

Wenn der Diameter des Circuls $2r$, die Abscisse oder der Sinus versus $= x$ ist, so ist für den Circul

$$2rx - xx = yy$$

$$2rdx - 2xdx = 2ydy$$

$$(rdx - xdx) : y = dy$$

$$(r^2dx^2 - 2rxdx^2 + x^2dx^2) : y^2 = dy^2$$

$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{(dx^2 + (r^2dx^2 - 2rxdx^2 + x^2dx^2) : (2rx - xx))} = \sqrt{((2rxdx^2 - x^2dx^2 + r^2dx^2 - 2rxdx^2 + x^2dx^2) : (2rx - xx))} = rdx : \sqrt{(2rx - xx)} = rdx(2rx - x^2)^{-1:2}$, oder, wenn ihr $2r = 1$ setzet, $\frac{1}{2}dx(x - x^2)^{-1:2}$. Damit dieses Element zu dem Integriren geschickt werde, so ziehet aus $(x - x^2)^{-1}$ die Wurtzel in der That (§. 95 P. I.).

Es ist aber $m = -1$, $n = 2$, $P = x$, $Q = -x$, und demnach

$$P^{m:n} = x^{-1:2} = A.$$

$$\frac{m}{n}AQ = -\tfrac{1}{2}.x^{-1:2}. - x = \tfrac{1}{2}x^{1:2} = B.$$

$$\frac{m-n}{2n}BQ = -\tfrac{3}{4}.\tfrac{1}{2}x^{1:2}. - x = \frac{1.3}{2.4}x^{3:2} = C.$$

$$\frac{m-2n}{3n}CQ = -\tfrac{5}{6}.\frac{1.3}{2.4}x^{3:2}. - x = \frac{1.3.5}{2.4.6}x^{5:2} = D.$$

$$\frac{m-3n}{4n}DQ = -\tfrac{7}{8}.\frac{1.3.5}{2.4.6}x^{5:2}. - x = \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}x^{7:2}$$

&c.

Daher

Daher ist $\frac{1}{2}dx:\sqrt{(x-xx)} = \frac{1}{2}x^{-1:2}dx + \frac{1}{4}x^{1:2}dx + \frac{1.3}{4.4}x^{3:2}dx + \frac{1.3.5}{4.4.6}x^{5:2}dx + \frac{1.3.5.7}{4.4.6.8}x^{7:2}dx$ &c. und folglich der Bogen

$$AP = x^{1:2} + \frac{1}{2.3}x^{3:2} + \frac{1.3}{2.4.5}x^{5:2} + \frac{1.3.5}{2.4.6.7}x^{7:2} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.9}x^{9:2}$$ &c. oder

$$\sqrt{x}\left(1 + \frac{1}{2.3}x + \frac{1.3}{2.4.5}x^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6.7}x^3 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.9}x^4 \text{ \&c.}\right)$$

Zusatz.

141. Wollet ihr den Sinum versum durch den Bogen ausdrucken, so werdet ihr auf die Art, wie oben (§. 137) finden $x = \frac{v^2}{1.2} - \frac{v^4}{1.2.3.4.} + \frac{v^6}{1.2.3.4.5.6}$ &c. = (wenn ihr das erste Glied A, das andere B u. s. w. setzet) $\frac{v^2}{1.2} - \frac{v^2 A}{3.4} + \frac{v^2 B}{5.6} - \frac{v^2 C}{7.8}$ &c.

Von der Cubatur der Cörper.

Die 5. Erklärung.

142. **Cubiren heißt den Inhalt eines Cörpers finden.**

Der 1. Zusatz.

143. Wenn ein Cörper erzeugt wird, indem eine Figur sich um ihre Axe herum beweat, so beschreibt jede Semiordinate einen Circul, und dannenhero ist das Element desselben das Product aus einem Circul, der mit der Semiordinate beschrieben wird, in die Differentiale der Abscisse. Wenn ihr demnach die Verhältniß des Radii zu der Peripherie setzet $r:p$, so ist die Peripherie des gedachten Circuls $py:r$ und der Inhalt $py^2:2r$ (§. 162 *Geom.*), folglich das Element $py^2dx:2r$.

Der 2. Zusatz.

144. Wenn ihr demnach den Werth von y^2 durch x aus der Gleichung für die gegebene Figur setzet und das Element integriret; so habt ihr den verlangten Inhalt des Cörpers.

Die 25. Aufgabe.

145. **Den Conum zucubiren.**

Auflösung.

Weil der Conus von einem Triangel beschrieben wird (§. 35 *Geom.*), so habt ihr (wenn

(wenn die Höhe des Triangels a, die Grund-Linie r ist)

$$rx = ay$$
$$r^2x^2 : a^2 = y^2$$
$$py^2dx : 2r = prx^2dx : 2a^2$$
$$\int py^2dx : 2r = prx^3 : 6a^2.$$

Wenn ihr den gantzen Kegel verlanget, so setzet a für x, und ihr findet seinen Inhalt $pra^3 : 6a^2 = \frac{1}{6}pra = \frac{1}{2}pr . \frac{1}{3}a$, das ist, wenn ihr die Grund-Fläche $\frac{1}{2}pr$ durch den dritten Theil der Höhe $\frac{1}{3}a$ multipliciret.

Die 26. Aufgabe.

146. **Die Kugel zucubiren.**

Auflösung.

Die Kugel wird von einem halben Circul beschrieben (§. 27 *Geom.*), in welchem (§. 198 P. I.).

$$2rx - xx = yy$$

daher ist
$$py^2dx : 2r = pxdx - px^2dx : 2r$$
$$\int py^2dx : 2r = \frac{1}{2}px^2 - px^3 : 6r.$$

Wenn ihr die gantze Kugel verlanget, so setzet $2r$ oder den Diameter für x oder die Hö-

Höhe des Kugel-Stücks, und ihr bekommet für ihren Inhalt $2pr^2 - 8pr^2 : 6 = 4pr^2 : 6 = \frac{2}{3}pr^2$.

Zusatz.

147. Der Inhalt eines umschriebenen Cylinders, dessen Höhe nemlich dem Diameter, die Grund-Fläche dem grösten Circul der Kugel gleichet, ist pr^2, und demnach verhält er sich zur Kugel wie pr^2 zu $\frac{2}{3}pr^2$, das ist, wie 3 zu 2.

Die 27. Aufgabe.

148. **Einen parabolischen After-Kegel zucubiren.**

Auflösung.

In der Parabel ist

$$y^2 = ax$$

daher $py^2dx : 2r = apxdx : 2r$

$$\int py^2dx : 2r = apx^2 : 4r = py^2x : 4r.$$

Wenn die Höhe des gantzen Kegels b und der halbe Diameter in der Grund-Fläche r ist; so ist der Inhalt desselben $bpr^2 : 4r = \frac{1}{4}bpr$.

Zusatz.

149. Da nun der umschriebene Cylinder $\frac{1}{2}bpr$ ist, so verhält sich dieser zu dem parabolischen After-Kegel wie $\frac{1}{2}bpr$ zu $\frac{1}{4}bpr$, das ist, wie 2 zu 1.

Die

Die 28. Aufgabe.

150. Unendliche parabolische After-Kegel auf einmal zucubiren.

Auflösung.

Es sey der Parameter $= 1$, so ist für unendliche Parabeln

$$y^{m} = x$$

$$y = x^{1:m}$$

$$y = x^{2:m}$$

$$py^2 dx : 2r = px^{2:m} dx : 2r$$

$$\int py^2 dx : 2r = mpx^{2+m, : m} : (4 + 2m)r = mpxy^2 : (2m + 4)r.$$

Die 29. Aufgabe.

151. Eine elliptische After-Kugel zucubiren.

Auflösung.

Es sey der kleine Diameter in der Ellipsi $2r$, der grosse $= 2a$, so ist

$$yy = rr - r^2x^2 : a^2 \quad (\S.\ 253\ P.\ I.)$$

$$py^2 dx : 2r = \tfrac{1}{2} prdx - prx^2 dx : 2a^2$$

$$\int py^2 dx : 2r = \tfrac{1}{2} prx - prx^3 : 6a^2.$$

Setzet für x die gantze große Axe $2a$, so kommt der Inhalt des gantzen Cörpers $apr - \frac{2}{6}apr = \frac{4}{6}apr = \frac{2}{3}apr$.

Der 1. Zusatz.

152. Der umschriebene Cylinder ist apr (§. 221 *Geom.*), und demnach verhält er sich zu der elliptischen After-Kugel wie apr zu $\frac{2}{3}apr$, das ist, wie 1 zu $\frac{2}{3}$, oder 3 zu 2.

Der 2. Zusatz.

153. Die Kugel, deren Diameter dem großen Diameter der Ellipsis gleichet, ist $2a^3p : 3r$ (§. 147). Demnach verhält sie sich zu der elliptischen After-Kugel wie $2a^3p : 3r$ zu $\frac{2}{3}apr$, das ist, wie a^2 zu r^2, oder wie das Quadrat der großen Axe zu dem Quadrate der kleinen.

Der 3. Zusatz.

154. Die Kugel, deren Diameter dem kleinen Diameter der Ellipsis gleichet, ist $\frac{2}{3}pr^2$ (§. 147). Derowegen verhält sie sich zu der elliptischen After-Kugel wie $\frac{2}{3}pr$ zu $\frac{2}{3}apr$, das ist, wie r zu a, oder die kleine Axe zu der großen.

Die 30. Aufgabe.

155. **Einen hyperbolischen After-Kegel zucubiren.**

Auf-

Auflösung.

Es sey die Zwerch-Axe $= 2a$, die kleine Axe $= 2r$, die Abscisse $= x$, die Semiordinate $= y$, so ist (§. 269 P. I.)

$$rr : aa = y^2 : 2ax + xx$$

$$y^2 = (2ar^2x + r^2x^2) : a^2$$

$$py^2dx : 2r = prxdx : a + prx^2dx : 2a^2$$

$$\int py^2dx : 2r = prx^2 : 2a + prx^3 : 6a^2.$$

Setzet für x die gantze Höhe des After-Kegels b, so kommt sein Inhalt $prb^2 : 2a + prb^3 : 6a^2$.

Die 31. Aufgabe.

156. **Den Inhalt des Cörpers zufinden, welcher erzeugt wird, indem der Raum zwischen der logarithmischen Linie MI und der geraden Linie PH sich um PH herum bewegt.** Tab. IX. Fig. 81.

Auflösung.

In der logarithmischen Linie, deren Subtangens $= a$, ist

$$ydx = ady \quad (\S.\ 112)$$

$$dx = ady : y$$

$$py^2dx : 2r = apy^2dy : 2ry = apydy : 2r$$

$$\int py^2dx : 2r = apy^2 : 4r.$$

Neh-

Nehmet r für die letzte Semiordinate AB an, so ist der Inhalt des gantzen Cörpers $\frac{1}{4}apr$, welcher durch die Bewegung des unendlichen Raums IBAH beschrieben wird.

Die 32. Aufgabe.

157. **Den Inhalt eines Cörpers zufinden, welcher beschrieben wird, indem sich eine halbe Parabel ANS um ihre Semiordinate bewegt.**

Auflösung.

Tab. IX. Fig. 75.

In diesem Falle ist das Element gleich dem Producte aus einem Circul, welcher mit MT der Differentz zwischen der Abscisse AP und AS beschrieben wird, in die Differentiale der Semiordinate. Setzet nun $AS = r$, $NS = b$, $AP = x$, so ist $PS = MF = r - x$. Wenn nun die Verhältniß des Radii zur Peripherie $r : p$, so findet ihr die Peripherie, welche mit MF beschrieben worden ist, $(rp - px) : r$, folglich den Circul $(r^2p - 2rpx + px^2) : 2r$. Dannenhero ist das Element $(r^2pdy - 2rpxdy + px^2dy) : 2r$. Nun ist in der Parabel, wenn der Parameter $= 1$, $y^2 = x$ (§. 217 P. I.) und $y^4 = x^2$. Daher das Element $\frac{1}{2}rpdy - py^3dy + py^4dy : 2r$, dessen Integrale $\frac{1}{2}rpy - \frac{1}{3}py^3 + py^5 : 10r$ das Stück des Cörpers exprimirt, welches von MNF beschrieben worden ist.

Wenn

Wenn ihr für y^2 seinen Werth x setzet, so habt ihr für eben dasselbe Stück $\frac{1}{2}rpy - \frac{1}{3}pxy + px^2y : 10r$. Setzet nun ferner r für x und b für y; so bekommet ihr für den ganzen Cörper $\frac{1}{2}rpb - \frac{1}{3}prb + pr^2b : 10r = (\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{10}bpr = \frac{(30 - 20 + 6)}{60}bpr = \frac{4}{15}bpr$.

Anmerckung.

158. Auf gleiche Weise könnet ihr den Inhalt der Cörper finden, wenn ihr setzet, daß sich eine Fläche um eine andere Linie, als z. E. um den Tangentem oder die subnormal-Linie bewegt.

Von der verkehrten Methode der Tangentium.

Die 9. Erklärung.

159. **Die verkehrte Methode der TANGENTIUM (Methodus Tangentium inversa) ist diejenige, welche zeigt, wie man aus dem gegebenen Subtangente, Tangente, der normal-Linie oder subnormal-Linie ꝛc. die Gleichung finden kan, welche die Natur der Linie erklärt.**

Zusatz.

160. Setzet nemlich die gegebenen Linien ihrem Werthe gleich, worinnen die differential-Grössen anzutreffen sind, so bekommet ihr die differential-Gleichung für die gesuchte Linie. Wenn ihr nun selbige integri-

tegriret, so bekommet ihr die gesuchte Gleichung.

Die 33. Aufgabe.

161. **Eine krumme Linie zufinden, deren** Subtangens $= 2yy : a$.

Auflösung.

Weil der Subtangens in einer jeden algebraischen Linie $= ydx : dy$, so ist

$$2y^2 : a = ydx : dy$$

$$2y^2dy = aydx \quad | \; y$$

$$2ydy = adx$$

$$y^2 = ax.$$

Welche Gleichung zeigt, daß die verlangte Linie eine Parabel sey.

Anmerckung.

162. Hätte man gesagt, daß der Subtangens solte $2x$ seyn, (ich setze aber beständig, wie vorhin, daß x allezeit die Abscisse, y die Semiordinate bedeute); so bekämet ihr $ydx = 2xdy$. Wollet ihr nun diese Gleichung zu dem Integriren geschickt machen, so sehet ihr, daß, wenn ihr x durch y exprimiren wollet, ihr y^2 durch eine beständige Grösse dividiren müsset, und dannenhero für $2x$ annehmen $2y^2 : a$.

Die 34. Aufgabe.

163. **Eine krumme Linie zufinden, deren subnormal-Linie beständig von einer Grösse ist. Z. E.** $= a$.

Auf-

Auflösung.

Die subnormal-Linie ist $ydy:dx$ (§. 46). Demnach

$$ydy:dx = a$$

$$ydy = adx$$

$$\tfrac{1}{2}y^2 = ax$$

$$y^2 = 2ax.$$

Also ist die verlangte Linie eine Parabel, deren Parameter der dopplten subnormal-Linie gleich ist.

Die 35. Aufgabe.

164. **Eine krumme Linie zufinden, deren Subtangens die mittlere proportional-Linie ist zwischen x und y.**

Auflösung.

Es ist $ydx:dy = \sqrt{xy}$

$$ydx = dy\sqrt{xy} = x^{1:2}y^{1:2}dy \quad y$$

$$dx = y^{-1:2}x^{1:2}dy \quad x^{1:2}$$

$$x^{-1:2}dx = y^{-1:2}dy$$

$$2x^{1:2} = 2y^{1:2}$$

$\sqrt{x}$

$$\frac{\sqrt{x} = \sqrt{y}}{x = y.}$$

Also ist die verlangte Figur ein gleichschencklichter rechtwincklichter Triangel. Ihr könnet aber auch setzen

$$\sqrt{x} + \sqrt{a} = \sqrt{y}$$

so ist $x + 2\sqrt{ax} + a = y$

$$2\sqrt{ax} = y - x - a$$

$$4ax = y^2 - 2yx + xx + 2ax - 2ay + aa$$

$$y^2 - 2yx + x^2 - 2ax - 2ay + aa = 0.$$

Welches eine Gleichung an dem Circul ist, worinnen der Ursprung von x und y auf besondere Weise (§. 362 P. I.) zudeterminiren ist.

Ihr könnet auch setzen, daß $\sqrt{x} - \sqrt{a} = \sqrt{y}$.

Die 36. Aufgabe.

165. **Eine krumme Linie zufinden, deren subnormal-Linie $= r - x$.**

Auflösung.

Es ist $ydy : dx = r - x$,

$$ydy = rdx - xdx$$

$\frac{1}{2}y^2$

$$\tfrac{1}{2}y^2 = rx - \tfrac{1}{2}x^2$$

$$y^2 = 2rx - xx.$$

Also ist die verlangte Linie ein Circul, dessen Diameter $= 2r$.

Die 37. Aufgabe.

166. **Eine Linie zufinden, deren subnormal-Linie $= \sqrt{ax}$.**

Auflösung.

Es ist $ydy : dx = \sqrt{ax} = a^{1:2}x^{1:2}$

$$ydy = a^{1:2}x^{1:2}dx$$

$$\tfrac{1}{2}y^2 = \tfrac{2}{3}\sqrt{ax^3}$$

$$ \quad 2$$

$$y^2 - \tfrac{4}{3}\sqrt{ax^3} = \tfrac{2}{3}\sqrt{4ax^3}.$$

Also ist das Quadrat der Semiordinate in dieser Linie jederzeit einem parabolischen Raume gleich (§. 91), und also die quadratrix parabolæ, weil durch ihre Semiordinaten die Parabel quadrit wird, deren Parameter $4a$.

Die 38. Aufgabe.

167. **Eine krumme Linie zuconstruiren, deren Subtangens einer unveränderlichen Linie gleich ist.**

Auflösung.

Es ist

$$ydx : dy = a$$

$$dx = ay^{-1}dy$$

$$\int dx = \int ay^{-1}dy.$$

Wenn ihr $ay^{-1}dy$ (§. 82) integriren woltet, so käme heraus $ay^0 : o = a : o$, das ist, eine unendliche große Grösse. Und also geht die Integration algebraisch nicht an. Da nun aber bekannt ist (§. 61), daß die angenommene Eigenschaft der logarithmischen Linie zugehört, in dieser aber die Abscissen x die Logarithmi der Semiordinaten sind (§. 307 P. I.); so muß auch $\int ay^{-1}dy (= x)$ der Logarithmus der Semiordinate seyn, und dannenhero könnet ihr jederzeit für die Integrale von $ay^{-1}dy$ oder $ady : y$ den Logarithmum von y oder ly setzen. Es muß aber der Logarithmus in einer logarithmischen Linie genommen werden, deren Subtangens a ist.

Der 1. Zusatz.

168. Da nun die Differentiale eines Logarithmi $= ady : y$, so könnet ihr jetzt auch diejenigen Grössen differentiiren, in welchen Logarithmi zufinden sind. Es sey z. E. ly^n, so ist die Differentiale $nly^{n-1}ady : y$.

Der 2. Zusatz.

169. Es sey die Differentiale eines Logarithmi $= dy : (1 + y)$; so ist der Logarithmus der

der Zahl $1+y=\int dy:(1+y)$. Nun ist $1:(1+y)=1-y+y^2-y^3+y^4$ u. s. w. wie ihr es findet, wenn ihr in der That dividiret, und daher $dy:(1+y)=dy-ydy+y^2dy-y^3dy+y^4dy$ &c. Derowegen ist $\int dy:(1+y)$ oder der Logarithmus von der Zahl $1+y=y-\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{4}y^4+\frac{1}{5}y^5$ &c.

Der 3. Zusatz.

170. Weil nun $l=y-\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{4}y^4+\frac{1}{5}y^5$ &c. so findet ihr (§. 137) $y=\frac{l}{1}+\frac{l^2}{1.2}+\frac{l^3}{1.2.3}+\frac{l^4}{1.2.3.4}+\frac{l^5}{1.2.3.4.5}$ &c.

Der 4. Zusatz.

171. Ihr sehet zugleich (§. 168), wie die Differentiale der logarithmischen Grössen integriret werden, wenn man a für den Subtangentem der logarithmischen Linie annimt. Es ist z. E. $\int ly^n dy:y=ly^{n+1}:(n+1)a$, $\int lydy\sqrt{(aa+ly^2)}:ay=(aa+ly^2)^{3:2}:3a$ u. s. w.

Anmerckung.

172. Wenn man die differential-Gleichung nicht integriren kann, so sucht man dieselbe auf die Quadratur oder Rectification des Circuls, oder Parabel, Hyperbel und Ellipsis zureduciren, weil diese Linien bekannt sind, und ist zufrieden, wenn man sagen kann, daß die Construction der verlangten Linie von der Quadratur oder Rectification einer von den gemeldeten Linien dependire: wovon ich noch einige Exempel hieher setzen muß. Ihr habt

euch aber zu dem Ende alle Elemente der Flächen und Längen in den Kegel-Schnitten bekannt zumachen, damit ihr um so viel leichter wahrnehmet, auf was für eine Quadratur oder Rectification sich jeder vorkommender Fall reduciren lasse.

Die 39. Aufgabe.

173. **Eine krumme Linie zuconstruiren, in welcher** $dz = qdu$.

Auflösung.

Es bedeutet q eine Grösse, welche aus veränderlichen und unveränderlichen in Gestalt eines Bruchs zusammen gesetzt ist. Beschreibet in unendlichen Fällen, welche unter der gegebenen Gleichung begriffen sind, eine krumme Linie, deren Abscissen $= v$, die Semiordinaten $= aq$ sind; so ist das Element dieser Linie $aqdu$. Wenn ihr nun dieses durch a dividiret, so bekommet ihr qdu. Derowegen richtet auf eben der Axe für die Abscissen u andere Semiordinaten auf, welche $= \int qdu$, das ist, dem Raume gleich sind, welcher zwischen dieser krummen Linie und ihren Coordinaten enthalten sind, wenn man ihn durch eine unveränderliche Grösse a dividiret, so bekommet ihr die Linie, deren differential-Gleichung $dz = qdu$.

Der 1. Zusatz.

174. Es sey $ydx = ady$, oder $dx = ady : y$, so sind die Semiordinaten der Linie, von deren Quadratur die Construction dependirt, $aa : y$. Da nun die Gleichung einer gleich-

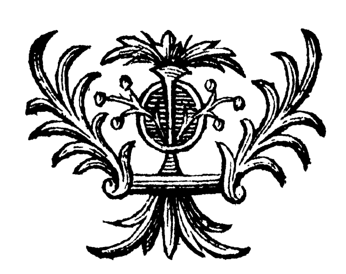
gleichseitigen Hyperbel zwischen ihren Asymptoten ist (§. 283 P. I.) $aa = zy$: so erkennet ihr daraus die Art der Linie.

Der 2. Zusatz.

175. Wenn in der verlangten Linie der Subtangens $= y\sqrt{(aa + yy)} : a$, so ist $dx = dy\sqrt{(aa + yy)} : a$. Also sind die Semiordinaten der Linie, von deren Quadratur die Construction dependirt, $\sqrt{(aa + yy)}$. Woraus ihr abermal erkennet, daß es eine gleichseitige Hyperbel sey, denn es sey $AC = CB = a$, $CQ = PM = y$, $QM = CP = x$; so ist $AP = x - a$, $BP = a + x$, folglich $AP.PB = x^2 - a^2$, und $y^2 = x^2 - a^2$ (§. 290 P. I.), und daher $x = \sqrt{(y^2 + a^2)} = QM$.

Tab. VI. Fig. 53.

ENDE
des
dritten Theils.



Der vierte Theil, von den Anfangs-Gründen der Exponential- und Differentio-Differential-Rechnung.

Die 1. Erklärung.

176. Die exponential-Rechnung besteht in dem Differentiiren und Integriren solcher Grössen, welche einen veränderlichen Exponenten haben, als x^x, a^x, und exponential-Grössen genennet werden.

Die 1. Aufgabe.

177. Eine exponential-Grösse zu differentiiren.

Auflösung.

Die gantze Kunst kommt darauf an, daß man die exponential-Grössen auf logarithmische reducirt, und sie (§. 168) differentiirt. Setzet nemlich

$$x^y = z$$

so ist $ylx = lz$

$lxdy + ydx : x = dz : z$ (§. 168)

$$z(lxdy + ydx : x) = dz$$

das ist, $x^y(lxdy + ydx : x) = dz$,

oder $x^y lxdy + yx^{y-1}dx = dz$.

Setzet abermal:

$$v^{x^y} = z$$

so ist $x^y lv = lz$

$$(x^y lxdy + yx^{y-1}dx)\,lv + x^y dv : v = dz : z$$

$$x(x^y lxdy + yx^{y-1}dx)\,lv + zx^y dv : v = dz$$

$$v^{x^y} x^y lxlvdy + v^{x^y} yv^{y-1} lvdx + v^{x^y} v^{-1} x^y dv = dz.$$

Auf gleiche Weise verfahret ihr in andern Fällen.

Die 2. Erklärung.

178. **Eine exponential-Linie wird genennet eine krumme Linie, welche durch eine exponential-Gleichung erklärt wird, als wenn $x^x = y$.**

Zusatz.

179. Wenn ihr die exponential-Gleichung differentiiret (§. 177), und den Werth von dx in dem differential-Werthe des Subtangentis und der subnormal-Linie substituiret; so findet ihr, wie in den algebraischen Linien, ihren Subtangentem und ihre subnormal-Linie. Es sey z. E.

$$x^x = y, \text{ so ist}$$

$$ylxdx + ydx = dy$$

$$dx = dy : (ylx + y)$$

$$ydx : dy = ydy : (ylx + y)dy = 1 : (1 + lx).$$

Für die subnormal-Linie ist

$$ydy : dx = (y^2lxdx + y^2dx) : dx = y^2lx + y^2 = y^2(lx + 1).$$

Die 2. Aufgabe.

180. **Die Differentiale einer logarithmischen Grösse zuintegriren.**

Auflösung.

Ihr sollet z. E. $xlxdx$ integriren. Setzet

$x = 1$

$$x = 1 + y$$

so ist $lx = l(1+y)$

$$dx = dy$$

$$xlxdx = l(1+y)(1+y)dy.$$

Nun ist $l(1+y) = y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5$ &c. Derowegen $l(1+y)(1+y)dy = (1+y)dy(y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5$ &c.$) =$ (wenn man in der That multiplicirt).

$$ydy - \tfrac{1}{2}y^2dy + \tfrac{1}{3}y^3dy - \tfrac{1}{4}y^4dy + \tfrac{1}{5}y^5dy \text{ \&c.}$$
$$+ y^2dy - \tfrac{1}{2}y^3dy + \tfrac{1}{3}y^4dy - \tfrac{1}{4}y^5dy \text{ \&c.}$$

das ist, $ydy + \frac{1}{2}y^2dy - \frac{1}{6}y^3dy + \frac{1}{12}y^4dy - \frac{1}{20}y^5dy$ &c.

folglich die verlangte Integrale $\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{6}y^3 - \frac{1}{24}y^4 + \frac{1}{66}y^5 - \frac{1}{120}y^6$ &c. $= \frac{1y^2}{1.2} + \frac{1y^3}{1.2.3} - \frac{1y^4}{2.3.4} + \frac{1y^5}{3.4.5} - \frac{1y^6}{4.5.6}$ &c.
in welcher Reihe $y = x - 1$.

Auf gleiche Manier könnet ihr in andern Fällen verfahren.

Die 3. Aufgabe.

181. Eine exponential-Grösse zu integriren.

Auflösung.

Ihr sollet z. E. $(1+y)^{1+y}dy$ integriren. Setzet:

$$(1+y)^{1+y} = 1+v$$

so ist $(1+y)\,l(1+y) = l(1+v)$

folglich (§. 169)

$$y + \tfrac{1}{2}y^2 - \tfrac{1}{6}y^3 + \tfrac{1}{12}y^4 - \tfrac{1}{20}y^5 \text{ \&c.} = v - \tfrac{1}{2}v^2 + \tfrac{1}{3}v^3 - \tfrac{1}{4}v^4 + \tfrac{1}{5}v^5 \text{ \&c.}$$

Setzet ferner:

$$v = y + ky^2 + my^3 + ny^4 + py^5 \text{ \&c.}$$

so ist

$$\begin{aligned}
v^2 &= + y^2 + 2ky^3 + k^2y^4 + 2kmy^5 \text{ \&c.} \\
&\qquad\qquad + 2my^4 + 2ny^5 \text{ \&c.} \\
v^3 &= \qquad + y^3 + 3ky^4 + 3k^2y^5 \text{ \&c.} \\
&\qquad\qquad\qquad + 3my^5 \\
v^4 &= \qquad\qquad + y^4 + 4ky^5 \text{ \&c.} \\
v^5 &= \qquad\qquad\qquad y^5 \text{ \&c.}
\end{aligned}$$

(§. 91 P. I.).

Daher

$$\begin{aligned}
v &= y + ky^2 + my^3 + ny^4 + py^5 \text{ \&c.} \\
-\tfrac{1}{2}v^2 &= -\tfrac{1}{2}y^2 - ky^3 - \tfrac{1}{2}k^2y^4 - kmy^5 \text{ \&c.} \\
&\qquad\qquad - my^4 - ny^5 \\
+\tfrac{1}{3}v^3 &= \qquad + \tfrac{1}{3}y^3 + ky^4 + k^2y^5 \text{ \&c.} \\
&\qquad\qquad\qquad + my^5 \\
-\tfrac{1}{4}v^4 &= \qquad\qquad - \tfrac{1}{4}y^4 - ky^5 \text{ \&c.} \\
-\tfrac{1}{5}v^5 &= \qquad\qquad\qquad + \tfrac{1}{5}y^5 \text{ \&c.} \\
&- y - \tfrac{1}{2}y^2 + \tfrac{1}{6}y^3 - \tfrac{1}{12}y^4 + \tfrac{1}{20}y^5 \text{ \&c.} = 0.
\end{aligned}$$

Man

Man bekommt demnach

$$1-1=0 \quad k-1=0 \quad m-k+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{6}=0$$

$$1=1 \quad k=1 \quad m=1-\tfrac{3}{6}=\tfrac{1}{2}$$

$$n-\tfrac{1}{2}k^2-m+k-\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{12}=0$$

$$n-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}+1-\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{12}=0$$

$$n=\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{12}=\tfrac{4}{12}=\tfrac{1}{3}.$$

$$p-km-n+k^2+m-k+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{20}=0$$

$$p=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-1-\tfrac{1}{2}+1-\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{20}$$

$$p=\tfrac{1}{3}-\tfrac{5}{20}=\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}=\tfrac{4}{12}-\tfrac{3}{12}=\tfrac{1}{12}.$$

Demnach ist $(1+y)^{1+y}=1+v=1+y+y^2+\frac{1}{2}y^3+\frac{1}{3}y^4+\frac{1}{12}y^5$ &c. folglich $(1+y)^{1+y}dy=dy+ydy+y^2dy+\frac{1}{2}y^3dy+\frac{1}{3}y^4dy+\frac{1}{12}y^5dy$ &c. Und daher $\int(1+y)^{1+y}dy=y+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{8}y^4+\frac{1}{15}y^5+\frac{1}{72}y^6$ &c.

Zusatz.

182. Wenn ihr die Differentiale einer exponential-Grösse integriren könnet, so könnet ihr auch die exponential-Linien quadriren.

Die

Die 3. Erklärung.

183. Differentio-differentiiren **heißt so viel, als die Differentiale von einer differential-Grösse finden.**

Zusatz.

184. Wenn die Differentiale dx ist, so nennet ihre Differentiale, oder die differentio-Differentiale von x, ddx; die differentiale von ddx aber $dddx$ u. s. w.

Die 4. Aufgabe.

185. **Eine jede gegebene differential-Grösse von neuem zudifferentiiren.**

Auflösung.

Es geschieht nach den Regeln (§. 13 & seqq.), nach welchen die veränderlichen Grössen differentiiret werden, nur, daß man eine differential-Grösse meistentheils als eine unveränderliche annimt, und daher auch die andere Differentiale für nichts hält (§. 4).

Z. E. Die andere Differentiale von xdx findet ihr $dx^2 + xddx$ (§. 16); $d(1:dx) = -ddx:dx^2$ (§. 24); $d(ydy:dx) = (dy^2 + yddy):dx$, wenn ihr dx unveränderlich annehmet, hingegen $= (dy^2dx - ydyddx):dx^2 =$

dy^2:

$dy^2:dx - ydyddx:dx^2$ (§. 24), wenn ihr dy unveränderlich annehmet; $d\sqrt{(dx^2+dy^2)} = dyddy:\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ wenn dx unveränderlich ist; hingegen $dxddx:\sqrt{(dx^2+dy^2)}$, wenn dy unveränderlich ist (§. 20) u. s. w.

Anmerckung.

186. Wenn die Rechnung auf gewisse Fälle applicirt wird, so ist nicht schwehr zusehen, welche Differentiale ihr für unveränderlich annehmen könnet.

Die 4. Erklärung.

187. *Wenn eine krumme Linie* AFK *anfangs die hohle, hernach die erhabene Seite gegen die Axe* AE *kehret, und immer in einem mit der Axe fortgeht, so heißt der Punct* F, *wo die Wendung geschieht, der Wendungs-Punct; hingegen der Wiederkehr-Punct, wenn sie wieder zurück gegen die Axe kehrt. In dem Lateinischen nennet man diese Puncte* Puncta flexus contrarii.

Tab. X. Fig. 86.

Der 1. Zusatz.

188. Wenn die krumme Linie einen Wendungs-Punct hat, so ist klar, daß die Linie AT zunimt mit der Abscisse AP, bis diese in E kommt, denn so bald sich die Linie wendet, so nimt die Linie AT wieder ab, und die Abscisse nimt, wie vorhin, zu.

De-

Derowegen könnet ihr AL als die gröste Linie von ihrer Art ansehen.

Der 2. Zusatz.

189. Hingegen, wenn die krumme Linie einen Wiederkehrungs-Punct hat, so wächst anfangs die Linie AT zugleich mit der Abscisse bis in L: nach diesem, wenn die Linie sich wendet, so nimt die Linie AT zu, hingegen die Abscissen gehen wieder zurück und nehmen ab, und dannenhero muß in diesem Falle die Linie AE die gröste von ihrer Art werden.

Der 3. Zusatz.

Tab. X. Fig. 86.

190. Da nun $AL = (ydx : dy) - x$ (§. 36), so ist, wenn ihr dx für unveränderlich annehmet (§. 185),

$$(dy^2dx - ydxddy) : dy^2 - dx = 0$$

$$dy^2dx - ydxddy - dy^2dx = 0$$

$$-yddy = 0$$

$$ddy = 0, \text{ oder } ddy = \infty \text{ (§. 64)}.$$

Der 4. Zusatz.

Tab. X. Fig. 87, 88.

191. Wenn die Semiordinaten BM aus einem Puncte B gezogen sind; so ziehet Bm und BM unendlich nahe, und Bt auf Bm perpendicular: dann ist klar, daß an der hohlen

hohlen Seite Bt grösser ist als BO, hingegen an der erhabenen kleiner wird. Derowegen ist in dem Wendungs-Puncte $tO = o$. Beschreibet nun aus dem Mittel-Puncte B den Bogen TH und MR, so sind die Triangel mMR, MBT und THO einander ähnlich (§. 183 *Geom.*), weil nemlich bey R, H (§. 48) und B rechte Winckel sind, und über dieses HOT=MTB, und MmR=MTB, indem beyde von MTB nur um einen unendlichen kleinen Winckel HBT und MBm unterschieden sind §. 101 *Geom.*), und die Ausschnitte des Circuls sind, weil die Winckel MBm und HBT mit HBM einen rechten Winckel machen, auch einander ähnlich. Demnach ist (§. 183 *Geom.*)

$$\begin{array}{ll} & mR : MR = BM : BT \\ & dy \quad dx \quad\;\; y \quad y\,dx : dy \\ & BM : BT = MR : TH \\ & y : \frac{y\,dx}{dy} = dx : \frac{dx^2}{dy} \\ & BM : BT = TH : HO; \\ \text{daher} & MR : TH = TH : HO \\ & dx : \frac{dx^2}{dy} = \frac{dx^2}{dy} : \frac{dx^3}{dy^2}. \end{array}$$

Also ist die Differentiale von BT oder tH, wenn ihr dx für unveränderlich annehmet, $= (dx\,dy^2 - y\,dx\,ddy) : dy^2$ (§. 185), dannenhero $OH + tH = Ot = (dx^3 + dx\,dy^2 - y\,dx\,ddy) : dy^2$.

$: dy^2$. Da nun die Linie rO in dem Wendungs-Puncte nichts wird, so ist

$$(dx\cdot + dxdy^2 - ydxddy) : dy^2 = o$$

$$dx^2 + dy^2 - yddy = o, \text{ oder} = \infty.$$

Die 5. Aufgabe.

192. **Den Wendungs-Punct in einer Linie zufinden, wo die Semiordinaten mit einander parallel sind.**

Auflösung.

Tab. X. Fig. 86.

Weil in diesem Falle $ddy = o$, so suchet diesen Werth aus der gegebenen Gleichung für die krumme Linie durch x, und ihr werdet daraus den Werth von AE, das ist, der Abscisse finden, welcher die aus dem Wendungs-Puncte F gezogene Semiordinate EF, zugehört.

Der 1. Zusatz.

193. Es sey $axx = xxy + aay$

$$\frac{ax^2}{x^2 + a^2} = y$$

$$\frac{2a^3xdx}{(x^2 + a^2)^2} = dy$$

Wenn

Wenn ihr nun dx für unveränderlich annehmet, so ist

$$(2a^3dx^2(xx+aa)^2 - 8a^3x^4dx^2 + 8a^5x^2dx^2) : (x^2+a^2)^4 = ddy = 0.$$

Und wenn ihr mit $(xx+aa)dx^2 : (x^2+a^2)^4$ dividiret,

$$2a^3x^2 + 2a^5 - 8a^3x^2 = 0$$

das ist $2a^5 - 6a^3x^2 = 0$

folglich $a^2 - 3x^2 = 0$

und $\sqrt{\tfrac{1}{3}a^2} = x.$

Setzet ihr diesen Werth in die Stelle von x in der Gleichung;

so ist $y = axx : (xx+aa)$

$$y = \tfrac{1}{3}a^3 : (\tfrac{1}{3}aa + aa) = \tfrac{1}{3}a^3 : (\tfrac{4}{3}aa)$$
$$= a^3 : 4aa = \tfrac{1}{4}a.$$

Solchergestalt könnet ihr den Wendungs-Punct finden, auch wenn die krumme Linie nicht beschrieben ist.

Der 2. Zusatz.

194. Es sey

$$y - a = (x-a)^{3:5}$$

so ist $dy = \tfrac{3}{5}(x-a)^{-2:5}dx$

$$ddy = -\tfrac{6}{25}(x-a)^{-7:5}dx^2 = 0.$$

Wenn nemlich dx unveränderlich angenommen wird: folglich

$$-\tfrac{6}{25}(x-a)^{-7:5}=0$$

$$-6=0.$$

Weil ihr keinen Werth von x findet, so setzet

$$-\tfrac{6}{25}(x-a)^{-7:5}dx^2=\infty$$

das ist $-6dx^2:25\sqrt[5]{(x-a)^7}=\infty$

folglich $25\sqrt[5]{(x-a)^7}=0$

$$x-a=0$$

$$x=a.$$

Der 3. Zusatz.

195. In der Parabel ist

$$x=y^2$$

$$x^{1:2}=y$$

$$\tfrac{1}{2}x^{-1:2}dx=dy$$

$$-\tfrac{1}{4}x^{-3:2}dx^2=ddy=0$$

$$\frac{1}{4\sqrt{x^3}}=0$$

$$1=0.$$

Setzet

Setzet ferner:

$$\frac{\frac{-dx^2}{4\sqrt{x^3}}}{} = \infty$$

so ist $\sqrt{x^3} = 0$.

Da ihr nun keinen Werth von x findet, ihr möget $ddy = 0$ oder $ddy = \infty$ setzen; so hat die Parabel keinen Wendungs-Punct.

Die 6. Aufgabe.

196. **Den Wendungs-Punct in einer krummen Linie zufinden, deren Semiordinaten alle aus einem Puncte gezogen werden.**

Auflösung.

Weil in diesem Falle $dx^2 + dy^2 - yddy = 0$ (§. 191); so dürfet ihr nur aus der gegebenen Gleichung für die Linie den Werth von dy durch dx exprimiren, und ihr werdet, wie vorhin, den Werth von x in unveränderlichen Grössen finden können.

Zusatz.

197. Es sey in der Conchoide des Nicomedis BA $= a$, BC $= b$, Cq $= x$, CM $= y$, so ist (§. 296 P.I.). Tab. IX. Fig. 79.

$$\frac{z + a = y}{dz = dy.}$$

Ferner ist $Bq = \sqrt{(zz - bb)}$, und weil bey t und B rechte Winckel sind, die Winckel S und q aber, deren Unterscheid qCS unendlich klein ist, einander gleich seyn (§. 183 *Geom.*).

$$Bq : BC = St : tq$$
$$\sqrt{(zz - bb)} : b = dz : bdz : \sqrt{(zz - bb)}$$

und, weil die Ausschnitte Cqt und CMr ähnlich sind,

$$Cq : qt = CM : Mr$$
$$z : \frac{bdz}{\sqrt{(zz - bb)}} = z + a : Mr$$

demnach ist $Mr = (z + a) bdz : z\sqrt{(zz - bb)} = dx$, folglich

$$(z + a) bdz = zdx \sqrt{(zz - bb)}$$

$$dz = dy = zdx \sqrt{(zz - bb)} : (bz + ab).$$

Wenn man demnach dx für unveränderlich annimt, so ist $ddy = (bz + ab)\sqrt{(z^2 - b^2)}\, dzdx : (bz + ab)^2 + (bz^3 + abz^2) dzdx : (bz + aa)^2 \sqrt{(z^2 - b^2)} - bzdzdx \sqrt{(z^2 - b^2)} : (bz + ab)^2 = abdzdx \sqrt{(z^2 - b^2)} : (bz + ab)^2 + (bz^3 + abz^2)\, dzdx : (bz + ab)^2 \sqrt{(z^2 - b^2)} = (2abz^2 - ab^3 + bz^3) dzdx : (ab + bz)^2 \sqrt{(z^2 - b^2} =$ (wenn man für dz seinen Werth setzet), $(2abz^3 - ab^3 z + bz^4) dx^2 : (ab + bz)^3$.

Setzet nun in der Gleichung $yddy = dx^2 + dy^2$ (§. 191) die gehörigen Werthe an ihre Stelle, so habt ihr

$(ab +$

$$(ab + bz).(2az^3 - ab^2z + z^4)dx^2 : (ab + bz)^3$$
$$= dx^2 + (z^4 - b^2z^2)dx^2 : (ab + bz)^2$$

$$2az^3 - ab^2z + z^4 = (ab + bz)^2 + z^4 - b^2z^2$$
$$= a^2b^2 + 2ab^2z + z^4$$

$$2az^3 - 3ab^2z - a^2b^2 = 0 \quad 2a$$

$$z^3 - \tfrac{3}{2}b^2z - \tfrac{1}{2}ab^2 = 0.$$

Suchet endlich aus dieser Gleichung die Wurtzel (§. 366, 372 P. I.). Wenn ihr diese mit a vermehret, so habt ihr die verlangte Linie CM ($= z + a$), welche den Wendungs-Punct determinirt.

Die 5. Erklärung.

198. **Wenn eine krumme Linie BDF mit einem Faden überlegt ist, welcher immer gleich viel gedehnt wird, und die gerade Linie BA anfangs die krumme in B berührt, hernach aber immer nach und nach von der krummen abgezogen wird, so beschreibt der äußere Punct A eine andere krumme Linie AHR, und nennet man die krumme Linie BDF die Evolute der Linie AHR, die Theile des Fadens DH, RF &c. aber die RADIOS der Evolute.** Tab. X. Fig. 89.

Der 1. Zusatz.

199. Wenn der Punct A in B fällt, und AB $= o$, so ist DH oder der Radius der Evo-

lute dem Bogen BD, sonst aber der Summe zwischen dem Bogen DB und der Linie AB gleich.

Der 2. Zusatz.

Tab. X. Fig. 89.

200. Ihr könnet jeden unendlich kleinen Bogen der Linie AHR als einen Circul-Bogen ansehen, welcher mit dem Radio DH, oder FR &c aus dem Mittel Puncte D oder F &c. beschrieben worden ist, und demnach stehen die Radii der Evolute alle auf der Linie AHR perpendicular (§. 48).

Der 3. Zusatz.

201. Weil nur so lange ein Circul-Bogen beschrieben wird, als der Radius der Evolute DH mit einem unendlich kleinen Bogen in der Evolute BDF eine gerade Linie macht; so müssen alle Radii die Evolute BDF berühren (§. 28).

Die 7. Aufgabe.

Tab. X. Fig. 90.

202. **Die Länge des Radii der Evolute MC zufinden, wenn die Semiordinaten PM der Linie AMD auf der Axe AB perpendicular stehen.**

Auflösung.

Es sey die Semiordinate pm der andern PM unendlich nahe, ingleichen der Radius Cm dem Radio CM. Ziehet CE mit der Axe AB parallel, bis sie die verlängerte Semiordinate

dinate in E erreicht. Weil bey R und E rechte Winckel sind, und RMm = EMC, indem EMG und CMm (§. 200) rechte Winckel seyn, so ist (§. *183 Geom.*)

$$MR : Mm = ME : MC$$
$$dx : \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = z : \frac{z\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dx}.$$

Da nun der Mittel-Punct in C ist, woraus der kleine Bogen Mm mit dem Radio CM beschrieben wird, und dieser unverändert bleibt, indem ME und mR zunimt; so muß die Differentiale des Radii CM, in Ansehung der Differentiale mR der Linie ME, nichts seyn. Nun ist die Differentiale des Radii CM, wenn ihr dx für unveränderlich (das ist, in allen Puncten der Linie von gleicher Grösse annehmet, $dzdx\sqrt{(dx^2 + dy^2)} : dx^2 + zdyddydx : dx^2\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = (dzdx^2 + dzdy^2 + zdyddy) : dx\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$.

Derowegen habt ihr

$$(dzdx^2 + dzdy^2 + zdyddy) : dx\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = 0$$
$$dzdx^2 + dzdy^2 = -zdyddy$$
$$(dzdx^2 + dzdy^2) : -dyddy = z$$

das ist, weil $dz = dy$,

$$(dx^2 + dy^2) : -ddy = z.$$

Wenn ihr nun die Werthe von dy^2 und ddy durch x aus der Gleichung für die krumme Linie exprimiret, so werdet ihr den Werth von z durch x finden.

Der 1. Zusatz.

203. In der Parabel ist

$$ax = y^2$$

daher $adx = 2ydy$

$$adx : 2y = dy$$

$$a^2dx^2 : 4y^2 = dy^2$$

das ist, $adx^2 : 4x = dy^2$.

Und wenn ihr dx für unveränderlich annehmet,

$$-adx^2 : 4x\sqrt{ax} = ddy.$$

Tab. X. Fig. 90.

Folglich $(dx^2 + dy^2) : -ddy = (4xdx^2 + adx^2)x\sqrt{ax} : axdx^2 = (a + 4x)\sqrt{ax} : a = \sqrt{ax} + 4x\sqrt{ax} : a = z = y + 4xy : a = PM + PE$. Es ist aber $PM = y$, und daher $PE = 4xy : a$.

Der 2. Zusatz.

204. Es sey für unendliche Parabeln

$$y^m = x$$

so ist $my^{m-1}dy = dx$.

Wenn ihr nun dx für unveränderlich annehmet, so ist

(mm —

$$(mm - m)y^{m-2}dy^2 + my^{m-1}ddy = 0$$

$$(mm - m)y^{m-2}dy^2 = - my^{m-1}ddy$$

$$(m - 1)y^{-1}dy^2 = - ddy,$$

das ist, $(m - 1)dy^2 : y = - ddy$. Demnach ist $(dx^2 + dy^2) : - ddy = (ydx^2 + ydy^2) : (m - 1)dy^2$.

Nun ist $dx^2 = m^2y^{2m-2}dy^2$. Derowegen, wenn ihr diesen Werth in die Stelle von dx^2 setzet, so bekommet ihr

$$(m^2y^{2m-1}dy^2 + ydy^2) : (m - 1)dy^2 = z$$

$$(m^2y^{2m-1} + y) : (m - 1) = z.$$

Setzet z. E. $m = 2$, so ist $4x\sqrt{x} + \sqrt{x} = z$, welche Gleichung mit der vorigen übereinkommt, wenn $a = 1$.

Anmerckung.

205. Wenn euch das Differentiiren beschwehrlich fallen will; so brauchet den Vortheil, wodurch wir oben (§ 24 seqq) die Regeln zudifferentiiren, zufinden, angewiesen haben.

E N D E
des
vierten Theils.

Anhang zu der Algebra, worinnen ihr Nutzen in verschiedenen Wissenschaften durch Exempel gezeigt wird.

Die 1. Erklärung.

1. Die Geschwindigkeit, mit welcher sich ein Cörper bewegt, ist die Verhältniß des Raums zu der Zeit.

Zusatz.

2. Es sey der Raum $= r$, die Zeit $= t$, die Geschwindigkeit $= c$; so ist die Geschwindigkeit $= r:t$ und $r = tc$.

Die 2. Erklärung.

3. Die Materie eines Cörpers ist diejenige, welche mit ihm wiegt und bewegt wird.

Zusatz.

4. Daher ist sie seiner Schwehre jederzeit proportional.

Die

Die 3. Erklärung.

5. **Die Grösse der Bewegung erwächst, wenn die Materie des Cörpers durch die Geschwindigkeit der Bewegung multiplicirt wird.**

Zusatz.

6. Es sey die Geschwindigkeit des Cörpers $= c$, seine Materie $= m$; so ist die Grösse der Bewegung $= mc$.

Die 1. Aufgabe.

7. **Die Lehrsätze zufinden, nach welchen die Bewegungen zweener Cörper, welche sich die gantze Zeit ihrer Bewegung mit einerley Geschwindigkeit bewegen, verglichen werden.**

Auflösung.

Es sey der eine Cörper A, seine Geschwindigkeit C, seine Materie M, die Zeit seiner Bewegung T, der Raum, welchen er durchlaufen hat R, die Grösse der Bewegung Q. Der andere Cörper a, seine Geschwindigkeit c, seine Materie m, die Zeit seiner Bewegung t, der Raum, welchen er durchlaufen hat r, die Grösse seiner Bewegung q. So ist $C = R : T$ und $c = r : t$ (§. 2). $Q = CM$, und $q = cm$ (§. 6). Solchergestalt habt ihr

$$\text{I. } C : c = \frac{R}{T} : \frac{r}{t}$$

II. $Q : q$

II. $Q:q = CM:cm$

Setzet $C = c$, so ist $R:T = r:t$ folglich

III. $R:r = T:t$.

Setzet $Q = q$, so ist $CM = cm$. Folglich

IV. $C:c = m:M$.

Setzet ferner $T = t$, so ist

V. $R = r$.

Setzet $C = c$, so ist

VI. $M = m$.

Wiederum, weil $C:c = (R:T):(r:t)$, so ist $CTr = ctR$, folglich

VII. $T:t = cR:Cr$.

VIII. $R:r = TC:tc$.

Setzet $T = t$, so ist $Cr = cR$. Folglich

IX. $C:c = R:r$.

Setzet $R = r$, so ist $CT = ct$. Folglich

X. $C:c = t:T$.

Weil $Q:q = CM:cm$, so ist $Qcm = qCM$, folglich

XI. $C:c = Qm:qM$.

XII. $M:m = Qc:qC$.

Setzet $C = c$, so ist $Qm = qm$. Folglich

XIII. $Q:q = C:c$.

Endlich weil

$$C:c = (R:T):(r:t)$$
$$Q:q = CM:cm$$

so ist $CQ:cq = tRCM:Trcm$

$$CQTrcm = cqtRCM \qquad Cc$$

$$QTrm = qtRM,$$

Dannenhero ist

XIV.

XIV. $Q:q = tRM:Trm$.
XV. $T:t = qRM:Qrm$.
XVI. $R:r = QTm:qtM$.
XVII. $M:m = QTr:qtR$.

Anmerckung.

8. Es ist nicht nöthig zuerinnern, wie die gefundenen Lehrsätze ausgesprochen werden, weil solches denen zur Gnüge bekannt seyn muß, welche das Vorhergehende verstanden haben. Aber wohl ist nöthig, daß ich ermahne, man solle sich diese Lehrsätze wohl bekannt machen, weil man sie in Auflösung anderer Aufgaben gar öfters vonnöthen hat. Mercket aber zugleich, wie man so viele Lehrsätze durch die Algebra gleichsam spielend heraus bringen kann, welche sonst durch viele Umwege zuerweisen, und noch schwehrer zuerfinden, wären.

Die 2. Aufgabe.

9. **Die Gesetze zufinden, nach welchen die schwehren Cörper in einem Raume, wo ihnen kein Wiederstand geschieht, herunter fallen.**

Auflösung.

I. Es ist aus der Erfahrung klar, daß, wenn ein schwehrer Cörper herunter fällt, seine Bewegung um so viel geschwinder wird, je länger er fällt. Woraus denn folgt, daß die Schwehre dem Cörper nach und nach einen neuen Druck geben muß, da die Würckung des ersten noch nicht vergangen, indem kein Widerstand vorhanden ist. Da nun in den Höhen, in welchen wir es versuchen können, die Schwehre der Cörper einerley gefunden wird; so können wir

wir annehmen, daß die Schwehre in jedem Augenblicke dem Cörper einen gleichkräftigen Druck gebe. Es sey also der Augenblick t, die Geschwindigkeit, welche der Cörper in einem erlangt c; so ist nach Verfliessung $2t$ die Geschwindigkeit $2c$, nach Verfliessung $3t$ ist sie $3c$ u. s. w. Nun verhalten sich die Räume, welche die Cörper durchlaufen, wie die Producte aus den Zeiten in die Geschwindigkeiten (§. 2, VIII). Daher ist der Raum, durch welchen der Cörper in dem ersten Augenblicke gefallen ist, tc; zu Ende des andern Augenblicks ist sein Raum, welchen er durchgelaufen hat $4tc$; zu Ende des dritten $9tc$; zu Ende des vierten $16tc$; zu Ende des fünften $25tc$; &c. **Demnach verhalten sich die Räume gegen einander wie** $1tc : 4tc : 9tc : 16tc : 25tc$ &c. das ist, wie $1 : 4 : 9 : 16 : 25$ &c. oder die **Quadrate der Zeiten.**

II. Ziehet nun die Höhe, durch welche der Cörper in dem ersten Augenblicke gefallen ist, von der Höhe ab, durch welche er in zween gefallen ist; so bleibt für den andern Augenblick 3 übrig, eben so findet ihr für den dritten 5, für den vierten 7, für den fünften 9 &c. Solchergestalt wird die Bewegung der schwehren Cörper nach den ungeraden Zahlen geschwinder gemacht.

III. Da nun $R : r = T^2 : t^2$, so ist $\sqrt{R} : \sqrt{r} = T : t$.

Ihr

Ihr könnet also die Zeiten durch die Wurtzeln des Raums andeuten.

IV. Wenn ihr demnach in einer Parabel die Abscissen für R annehmet, so sind die Semiordinaten $\sqrt{R}$.

V. Wiederum, weil $R:r = C^2:c^2$; so ist $\sqrt{R}:\sqrt{r} = C:c$. Ihr könnet also die Geschwindigkeit durch die Wurtzeln des Raums ausdrucken.

VI. Dannenhero wenn die Abscissen in einer Parabel R sind, so sind die Semiordinaten $\sqrt{R}$, und also $= C$.

Zusatz.

10. Wenn in dem Triangel AEI die Abscissen AB, AC &c. $= T$, die Semiordinaten BF, CG &c. $= C$ angenommen werden; so sind die Triangel $= \frac{1}{2}TC = R$. Wenn ihr nun setzet, daß alle Ordinaten BF, CG, DH, EI einander gleich sind: so werden die Triangel Rectangula, deren Inhalt $= TC$. Da nun TC den Raum vorstellet, welchen der Cörper in der Zeit T mit der Geschwindigkeit C durchlaufen würde, welche er zu Ende der Zeit hat, wenn er sie gleich anfangs hätte, und stets dieselbe unverändert behielte; so ist klar, daß dieser Raum sich zu jenem verhält, wie TC zu $\frac{1}{2}TC$, das ist, wie 1 zu $\frac{1}{2}$, oder wie 2 zu 1.

Tab. XI. Fig 91.

Die 3. Aufgabe.

11. Aus der gegebenen Zeit, in welcher ein Cörper durch eine gewisse Höhe gefallen ist, zufinden, wie er in jedem Theile derselben Zeit gefallen ist.

Auflösung.

Es sey der erste Theil der Zeit 1, die Zahl der Theile m, der Raum in dem ersten Theile x; so ist der Raum in dem letzten $2mx - 2x + x$ (*§. 9 & 69 Arithm.*) $= 2mx - x$, und die Summe in allen Theilen der Zeit m^2x (*§. 113 P. I. Alg.*). Setzet nun den gantzen Raum a, so ist $m^2x = a$

$$x = a : m^2.$$

Es sey z. E. $a = 125$, $m = 5$ Secunden, so ist $x = 125 : 25 = 5$. Also ist der Cörper in der ersten Secunde 5, in der andern 15, in der dritten 25, in der vierten 35, in der fünften 45' gefallen.

Die 4. Aufgabe.

Tab. XI. Fig. 92.

12. Es wird eine Kugel aus C nach der Linie DC wieder die Wand AB geworfen, man soll den Winckel EDG finden, welchen die Linie ED, nach welcher sie zurück prallet, mit AB macht. Wir wollen CDF den Einfalls-Winckel, EDG aber den Reflexions-Winckel nennen.

Auflösung.

Lasset aus C und E die perpendicular-Linien CF und EG fallen. Es sey CF $= a$, EG $= b$, FG $= c$, DF $= x$; so ist DG $= c - x$, $CD^2 = aa + xx$, $DE^2 = bb + cc - 2cx + xx$. Da nun die Natur immer den kürtzesten Weg geht, so muß die Kugel in D dergestalt zurück prallen, daß sie bis E den kürzesten Weg nimt, welchen

chen sie aus C durch das Zurückprallen von der Fläche AB nehmen kan. Und demnach ist CD + DE die kleinste Grösse von ihrer Art. Bildet euch demnach eine krumme Linie ein, deren Gleichung

$$\surd(aa+xx)+\surd(bb+cc-2cx+xx)=y$$

so ist $xdx:\surd(aa+xx)+(xdx-cdx:\surd(bb+cc-2cx+xx)=dy=o$ (§. 20 P. II.)

$$x\surd(bb+cc-2cx+xx)+(x-c)\surd(aa+xx)=o$$

$$x\surd(bb+cc-2cx+xx)=(c-x)\surd(aa+xx)$$

das ist, FD.ED = DG.CD.

Folglich FD : CD = DG : DE, und daher der Reflexions-Winckel EDG dem Einfalls-Winckel CDF gleich (§. 52, 182 *Geom.*).

Zusatz.

13. Hieraus sehet ihr zugleich, daß, wenn ein Strahl des Lichts CD auf einen Spiegel fällt, er dergestalt in E reflectirt wird, daß der Reflexions-Winckel EDG dem Einfalls-Winckel CDF gleich ist.

Die 5. Aufgabe.

14. **Aus der gegebenen Weite eines strahlenden Punctes A von dem Mittel-Puncte B eines sphärischen Spiegels DEF den Punct zufinden, wo der reflectirte Strahl DC mit der Axe vereinigt wird.** Tab. XI. Fig. 93.

Auflösung.

Es sey AB = a, BD = BE = r, BC = x, so (*Wolfs Mathes. Tom. IV.*) Fff fff ist

ist CE $= r - x$. Weil das Auge, welches den strahlenden Punct A in dem Spiegel sieht, in der Axe AE steht, so muß der Punct D, von welchem der Strahl, welcher in das Auge fällt, reflectirt wird, der Axe AE überaus nahe seyn. Und dannenhero ist DC $=$ CE $= r - x$, die Winckel m, n, p und q sind unendlich klein, und daher ist DB : AB $= m : n$, und DC : CB $= q : p$, folglich auch DB + AB : AB $= m + n : n$. Da nun $q = m + n$ (§. 101 *Geom.*), und $p = n$ (§. 13); so ist DB + AB : AB $= q : p$. Derowegen ist (§. 28 *Arithm.*)

$$DE + AB : AB = DC : BC$$

das ist,

$$AE : AB = EC : BC$$

$$a + r : a = r - x : x$$

$$ax + rx = ar - ax$$

$$2ax + rx = ar$$

$$x = ar : (r + 2a)$$

$r - x = r - ar : (r + 2a) = (r^2 + ar) : (r + 2a)$, das ist, EC $=$ AE.BE : (BE + 2AB), oder, wenn ihr AE $= r + a = d$ setzet, $= dr : (2d - r)$.

Der 1. Zusatz.

15. Wenn d grösser ist als r, so ist auch $2d : (2d - r)$ grösser als 1 (§. 78 *Arithm.*): und daher $\frac{1}{2}r.2d : (2d - r) = dr : (2d - r)$ grösser als $\frac{1}{2}r$, das ist, wenn der strahlende Punct A vor dem Hohl-Spiegel weiter weg ist als der Semidiameter des Spiegels BE austrägt; so

so ist die Weite des Bildes EC grösser als der vierte Theil des Diameters.

Der 2. Zusatz.

16. Wenn d grösser ist als r, so ist auch $2d-r$ grösser als d, und daher $d:(2d-r)$ weniger als 1 (§. 78 *Arithm.*), folglich $dr:(2d-r)$ weniger r, das ist, die Weite des Bildes von dem Hohl-Spiegel ist geringer als der halbe Diameter.

Der 3. Zusatz.

17. Wenn $a=r$, so ist $dr:(2d-r)=rr:(2r-r)=r$, das ist, wenn der strahlende Punct um den halben Diameter des Spiegels von ihm weg ist, oder in seinem Mittel-Puncte steht, so wird auch sein Bild daselbst gesehen.

Der 4. Zusatz.

18. Wenn $d=\frac{1}{2}r$, so ist $2d=r$ und $rd:(2d-r=dr:o$, das ist, die Weite des Bildes von dem hohl-Spiegel wird unendlich groß, weil der Nenner, in Ansehung des Zehlers, zu nichts wird, das ist, die Strahlen werden mit der Axe parallel, denn in diesem Falle können sie niemals mit ihr zusammen kommen.

Der 5. Zusatz.

19. Wenn d kleiner ist als r, und $2d$ grösser als r (oder d grösser als $\frac{1}{2}r$); so ist $2d:(2d-r)$ grösser als 1. Denn setzet: $2d=r+m$, so ist $2d-r=m$, und daher $2d:(2d-r)=1+r:m$. Und demnach $\frac{1}{2}r.2d:(2d-r)$ grösser als $\frac{1}{2}r$, Derowegen wird das Bild ausser dem Hohl-

Spiegel gesehen, wenn die Sache zwischen dem Mittel-Puncte und dem Brenn-Puncte liegt, welcher (§. 21) um $\frac{1}{2}r$ von dem Spiegel weg ist.

Der 6. Zusatz.

20. Wenn d kleiner ist als $\frac{1}{2}r$, so hat der Nenner $2d-r$ das Zeichen —. Denn, setzet $2d=r-m$, so ist $2d-r=-m$. Und also hat der gantze Bruch $dr:(2d-r)$ das Zeichen —. Derowegen muß der Ort des Bildes hinter dem hohl-Spiegel seyn, wenn die Sache zwischen dem brenn-Puncte und dem Spiegel liegt.

Der 7. Zusatz.

21. Wenn d unendlich groß wird, das ist, wenn die Strahlen mit der Axe parallel einfallen, so ist r, in Ansehung $2d$, für nichts zu halten, und demnach ist $dr:(2d-r)=dr:2d=\frac{1}{2}r$.

Der 8. Zusatz.

22. Wenn der Spiegel erhaben ist, so ist $d=a-r$, und daher bekommet ihr an statt $(rr+ar):(2a+r)$ die Linie $EC=(ar-rr):(2a-r)=dr:(2d+r)$. Denn, weil $2a-2r=2d$, so ist $2a-r=2d+r$. Weil nun hier d allezeit grösser ist als r (denn sonst müste die Sache innerhalb dem Spiegel stehen), und $d:(2d+r)$ weniger als 1; so ist auch $dr:(2d+r)$ weniger als r. Derowegen wird das Bild zwischen dem Mittel-Puncte des Spiegels und seiner Fläche gesehen, die Sache mag so weit weg seyn als sie will.

Der

Der 9. Zusatz.

23. Setzet d unendlich groß, so ist r, in Ansehung $2d$, unendlich klein, und dannenhero $dr:(2d+r)=dr:2d=\frac{1}{2}r$. Derowegen wird das Bild niemals weiter hinter einem erhabenen Spiegel gesehen, als den vierten Theil des Diameters, wenn es gleich unendlich weit weg steht.

Anmerckung.

24. Es ist nicht nöthig zuerinnern, daß, wenn d und r durch Zahlen gegeben werden, auch die Weite des Bildes von der Spiegel-Fläche in Zahlen herauskomme, und ihr auch daher die Verhältniß der Weite zu dem Diameter des Spiegels finden könnet.

Der 10. Zusatz.

25. Wenn r unendlich groß wird, so ist der Spiegel platt, und alsdenn ist $2d$, in Ansehung r, unendlich klein. Derowegen wird in diesem Falle $dr:(2d+r)=dr:r=d$, das ist, in einem platten Spiegel ist das Bild so weit hinter ihm, als die Sache vor ihm.

Der 11. Zusatz.

26. Setzet, die Weite des strahlenden Punctes in einem hohl-Spiegel werde nd, so ist die Weite des Bildes $ndr:(2nd-r)$. Derowegen, wenn die Weiten des strahlenden Punctes von dem hohl-Spiegel sich gegen einander verhalten wie d zu nd, so verhalten sich die Weiten des Bildes von demselben wie $dr:(2d-r)$ zu $ndr:(2nd-r)$, das ist, wie $1:(2d-r)$ zu $n:(2nd-r)$, oder wie $2nd-r$ zu

$2nd - nr$. Wenn nun n eine gantze Zahl, und d grösser als r ist; so ist $2nd - rn$ kleiner als $2nd - r$. Derowegen, wenn der strahlende Punct ausser dem Mittel-Puncte des Spiegels ist, so geht das Bild näher zu dem Spiegel, wenn der strahlende Punct weiter davon weggeht. Hingegen, wenn n eine gebrochene Zahl ist, so ist $2nd - rn$ grösser als $2nd - r$. Derowegen, wenn der strahlende Punct von dem hohl Spiegel weiter weg ist als der Mittel-Punct desselben, so geht das Bild von dem Spiegel weg, wenn der strahlende Punct sich demselben nähert.

Der 12. Zusatz.

27. Wenn d kleiner ist als $\frac{1}{2}r$, und nd gleichfalls kleiner als $\frac{1}{2}r$, so verhalten sich die Weiten des Bildes von dem Spiegel wie $r - 2nd$ zu $rn - 2nd$. Wenn nun n eine gantze Zahl ist, so ist $rn - 2nd$ grösser als $r - nd$, das ist, wenn der strahlende Punct von dem Spiegel weg geht, so geht auch das Bild davon weg. Hingegen wenn n eine gebrochene Zohl ist, so ist $r - 2nd$ grösser als $rn - 2nd$, das ist, wenn der strahlende Punct dem Spiegel näher kommt, so kommt ihm auch das Bild näher.

Der 13. Zusatz.

28. Es werde gleichfalls bey einem erhabenen Spiegel die Weite des strahlenden Punctes nd, so wird die Weite des Bildes von dem Spiegel $ndr : (2nd + r)$, das ist, wenn die Weiten des strahlenden Punctes sich verhalten

ten wie d zu nd; so verhalten sich die Weiten des Bildes von dem erhabenen Spiegel wie $dr:(2d+r)$ zu $ndr:(2nd+r)$, das ist, wie $1:(2d+r)$ zu $n:(2nd+r)$, oder wie $2nd+r$ zu $2nd+nr$. Wenn nun n eine gantze Zahl ist, so ist $2nd+nr$ grösser als $2nd+r$. Derowegen, wenn der strahlende Punct von dem Spiegel weg geht, so geht auch das Bild zurück Hingegen, wenn n eine gebrochene Zahl ist, so ist $2nd+nr$ kleiner als $2nd+r$. Derowegen, wenn der strahlende Punct dem Spiegel näher kommt, so kommt ihm auch das Bild näher.

Die 6. Aufgabe.

29. **Das Gesetz der Natur zufinden, nach welchem die Strahlen des Lichts gebrochen werden, wenn sie aus einem durchsichtigen Cörper in einen andern dichtern fahren.**

Auflösung.

Es werde der Strahl AB in B gebrochen, und fahre in G. Setzet die Geschwindigkeit, mit welcher sich der ungebrochene Strahl AB bewegt, verhalte sich zu der Geschwindigkeit des gebrochenen BG wie n zu m. Derowegen ist die Zeit, in welcher die Linie AB durchlaufen wird, zu der Zeit, in welcher das Licht durch die Linie BG kommt, wie nBA zu mBG (§. 7). Lasset nun von A und G die perpendicular-Linien AD und GC fallen, und es sey $AD=a$, $CG=b$, $CD=c$, $CB=x$, so ist $BD=c-x$, folglich $BG=\sqrt{(xx+bb)}$, $AB=\sqrt{(aa+cc-}$

Tab. XI. Fig. 94.

$cc - 2cx + xx$) und $nBA + mGB = n\sqrt{(aa + cc - 2cx + xx)} + m\sqrt{(xx + bb)}$. Weil nun das Licht aus A in G in der geschwindesten Zeit kommen muß, indem die Natur immer den kürzesten Weg geht; so ist $n\sqrt{(aa + cc - 2cx + xx)} + m\sqrt{(xx + bb)}$ die kürzeste Zeit, in welcher das Licht durch die Refraction aus A in G gelangen kann. Bildet euch demnach eine krumme Linie ein, in welcher $n\sqrt{(aa + cc - 2cx + xx)} + m\sqrt{(xx + bb)} = y$, so ist (§. 20 P. II.)

$$n(xdx - cdx) : \sqrt{(aa + cc - 2cx + x^2)} + mxdx : \sqrt{(x^2 + b^2)} = dy = 0$$

$$mx : \sqrt{(x^2 + b^2)} = n(c - x) : \sqrt{(aa + cc - 2cx + x^2)}$$

Das ist, $mCB : BG = nDB : AB$

$$mCB.AB = nBD.BG.$$

Setzet $BG = AB$, so ist

$$mCB = nBD:$$

folglich $m : n = BD : BC$.

Wenn ihr nun BG und AB für den Sinum totum annehmet, so ist BD der Sinus des Winckels BAD oder ABK, hingegen BC der Sinus des Winckels BGC oder GBF (§. *97 Geom & §. 3 Trigon.*). Und demnach hat der Sinus des Inclinations-Winckels ABK zu dem Sinu des gebrochenen Winckels FBG beständig einerley Verhältniß.

Die 7. Aufgabe.

Tab. XI. Fig. 95.

30. **Den Punct f zufinden, wo die Strahlen des Lichts, nach geschehener Re-**

Refraction, in dem Glase KL mit der Axe AF vereiniget werden.

Auflösung.

Setzet, der Strahl AD sey dem Strahle AB unendlich nahe, so ist der Winckel A unendlich klein, und die Linie DI welche mit der Axe einen rechten Winckel in I macht, steht auch auf AD perpendicular Eben so macht macht GH so wohl in G als H einen rechten Winckel. Es sey nun $AD = AB = AI = y$, $Bc = a$, $EC = b$, $BE = f$, $DF = IF = BF = x$, $HF = EF = GF = v$, $Hf = Ef = Gf = z$, $cP = r$; $CM = t$, die Verhältniß der Refraction aus der Luft in das Glas $3:2$; so ist $Ac = y + a$, $FC = v + b$, $Fc = x - a$. Weil nun $3:2 = cP : cQ$ (§. 29), so ist $cQ = 2r:3$ Eben so, weil $2:3 = CM:CN$ (§. 29), ist $CN = 3t:2$. Weil ID mit cP parallel, so ist (§. *184 Geom.*)

$$Ac : cP = AI : ID$$

$$y + a : r = y : ry : (y + a).$$

Eben so, weil, wegen der rechten Winckel bey D und Q, die Linien ID und cQ parallel sind, ist (§. *184 Geom.*)

$$FI : ID = Fc : cQ$$

$$x : ry : (y + a) = x - a : \tfrac{2}{3}r$$

$$\tfrac{2}{3}rx = (rxy - ary) : (y + a)$$

$$2rxy + 2arx = 3rxy - 3ary$$

$$3ary = rxy - 2arx$$

$$3ay : (y - 2a) = x.$$

Wiederum, weil, wegen der rechten Winckel bey M und H, die Linien CM und GH parallel sind, so ist (§. 184 *Geom.*)

$$FC:CM = FG:GH$$
$$b+v : t = v : tv:(b+v).$$

Und endlich, weil, wegen der rechten Winckel bey N und H, die Linien CN und GH parallel sind, so ist (§. 184 *Geom.*)

$$fC:CN = fG:GH$$
$$b+z : \tfrac{3}{2}t = z : tv:(b+v)$$
$$\tfrac{3}{2}tz = (btv+tvz):(b+v)$$
$$3btz + 3tvz = 2btv + 2tvz$$
$$3bz = 2bv - vz$$
$$3bz:(2b-z) = v = x - f$$
$$f+3bz:(2b-z) = x = 3ay:(y-2a)$$
$$2bfy - fzy + 2afz - 4abf + 3bzy - 6abz = 6aby - 3azy$$
$$3azy + 3bzy + 2afz - fzy - 6abz = 6aby + 4abf - 2bfy$$
$$z = \frac{6aby + 4abf - 2bfy}{3ay + 3by + 2af - fy - 6ab} = Ef.$$

Wenn ihr die Dicke des Glases nicht regardiret, und also $= o$ setzet, so verlieren sich alle Glieder, welche durch f multipliciret sind, und ihr bekommet

Ef

$Ef = z = 6aby : (3ay + 3by - 6ab) = 2aby : (ay + by - 2ab)$.

Anmerckung.

31. Unerachtet die gefundene Regel hauptsächlich dient, den Ort des Bildes zufinden, wenn das Glas auf beyden Seiten erhaben ist, und zwar die Radii der erhabenen Flächen nicht von einerley Grösse sind; so könnet ihr doch daraus gar leicht auch Regeln vor alle übrigen Fälle herleiten, wie aus folgenden Zusätzen erhellet.

Der 1. Zusatz.

32. Wenn das Glas auf beyden Seiten gleich erhaben ist, so ist $cB = CE$, das ist, $a = b$, und daher $z = 2a^2y : (2ay - 2a^2) = ay : (y - a)$.

Der 2. Zusatz.

33. Wenn cB oder a unendlich groß wird, so ist die Seite KBL, welche gegen den strahlenden Punct A gekehrt ist, platt, und die Glieder, welche durch a nicht multipliciret sind, werden, in Ansehung der andern, unendlich klein, oder nichts. Daher ist $z = 2aby : (ay - 2ab) = 2by : (y - 2b)$.

Der 3. Zusatz.

34. Hingegen, wenn b unendlich groß wird, so ist das Glas auf der hintern Seite KEL platt, und die Glieder, worinnen b nicht vorhanden ist, werden, in Ansehung der andern, unendlich klein. Solchergstalt ist $z = 2aby : (by - 2ab) = 2ay : (y - 2a)$.

Der 4. Zusatz.

35. Also ist es gleich viel, ob ihr die erhabene oder platte Fläche eines Glases, welche auf

auf einer Seite erhaben, auf der andern platt ist, gegen den strahlenden Punct kehret.

Der 5. Zusatz.

36. Wenn so wohl a als b unendlich groß werden, so wird das Glas auf beyden Seiten platt, und $ay + by$ werden, in Ansehung $2ab$, unendlich klein. Daher ist $z = 2aby : - 2ab = - y$. Also kommen die Strahlen nirgens zusammen, als in dem Puncte, wo sie ausfliessen.

Der 6. Zusatz.

37. Wenn y unendlich groß wird, so fallen die Strahlen mit der Axe parallel ein, und daher ist $2ab$, in Ansehung der übrigen Glieder, unendlich klein, folglich $z = 2aby : (ay + by) = 2ab : (a + b)$ für ein Glas, welches auf beyden Seiten auf verschiedene Art erhaben ist.

Der 7. Zusatz.

38. Wenn das Glas beyderseits auf gleiche Art erhaben ist, so ist $z = 2aa : 2a = a$.

Der 8. Zusatz.

39. Wenn a unendlich groß wird, so ist die Seite KBL gegen den strahlenden Punct zu platt, und b, in Ansehung a, unendlich klein. Derowegen ist $z = 2ab : a = 2b$. Hingegen, wenn b unendlich groß wird, so ist die von dem strahlenden Puncte A weggekehrte Seite KEL platt, und a, in Ansehung b, unendlich klein. Derowegen ist $z = 2ab : b = 2a$.

Der

Der 9. Zusatz.

40. Wenn ihr für $+b$ in der Regel $-b$ setzet, so wird das Glas auf der Seite KBL, gegen den strahlenden Punct A zu, hohl, und $z = -2aby:(ay - by + ab)$.

Der 10. Zusatz.

41. Setzet $-a$ für $+a$, so wird das Glas auf der von dem strahlenden Puncte weggekehrten Seite hohl, und $z = -2aby:(by + 2ab - ay)$.

Der 11. Zusatz.

42. Wenn ihr für a und b zugleich $-a$ und $-b$ setzet, so wird das Glas auf beyden Seiten hohl, und $z = 2aby:(-ay - by - 2ab)$.

Der 12. Zusatz.

43. Wenn a unendlich groß wird, und ihr $-b$ für b setzet, so ist das Glas auf der Seite gegen den strahlenden Punct platt, auf der andern aber hohl, und die Grössen, welche durch a nicht multipliciret sind, werden, in Ansehung der andern, unendlich klein. Daher ist $z = -2by:(y + 2b)$.

Der 13. Zusatz.

44. Wenn b unendlich groß wird, und ihr $-a$ für a setzet, so ist das Glas auf der Seite gegen den strahlenden Punct zu hohl, auf der andern erhaben, und die Grössen, welche durch b nicht multipliciret sind, werden, in Ansehung der andern, unendlich klein. Daher ist $z = -2ay:(y + 2a)$.

Der 14. Zusatz.

45. Wenn y unendlich groß wird, so fallen die Strahlen parallel ein, und daher wird (§. 40) $z = -2aby : (ay - by) = -2ab : (a-b)$, (§. 41) $z = -2aby : (-ay + by) = -2ab : (b-a) =$ (wenn $a = b$) $-2a^2$, (§. 42) $z = 2aby : (-ay - by) = 2ab : (-a-b) =$ (wenn $a = b$) $= a$, (§. 43) $z = -2by : y = -2b$, (§. 44) $z = -2ay : y = -2a$.

Der 15. Zusatz.

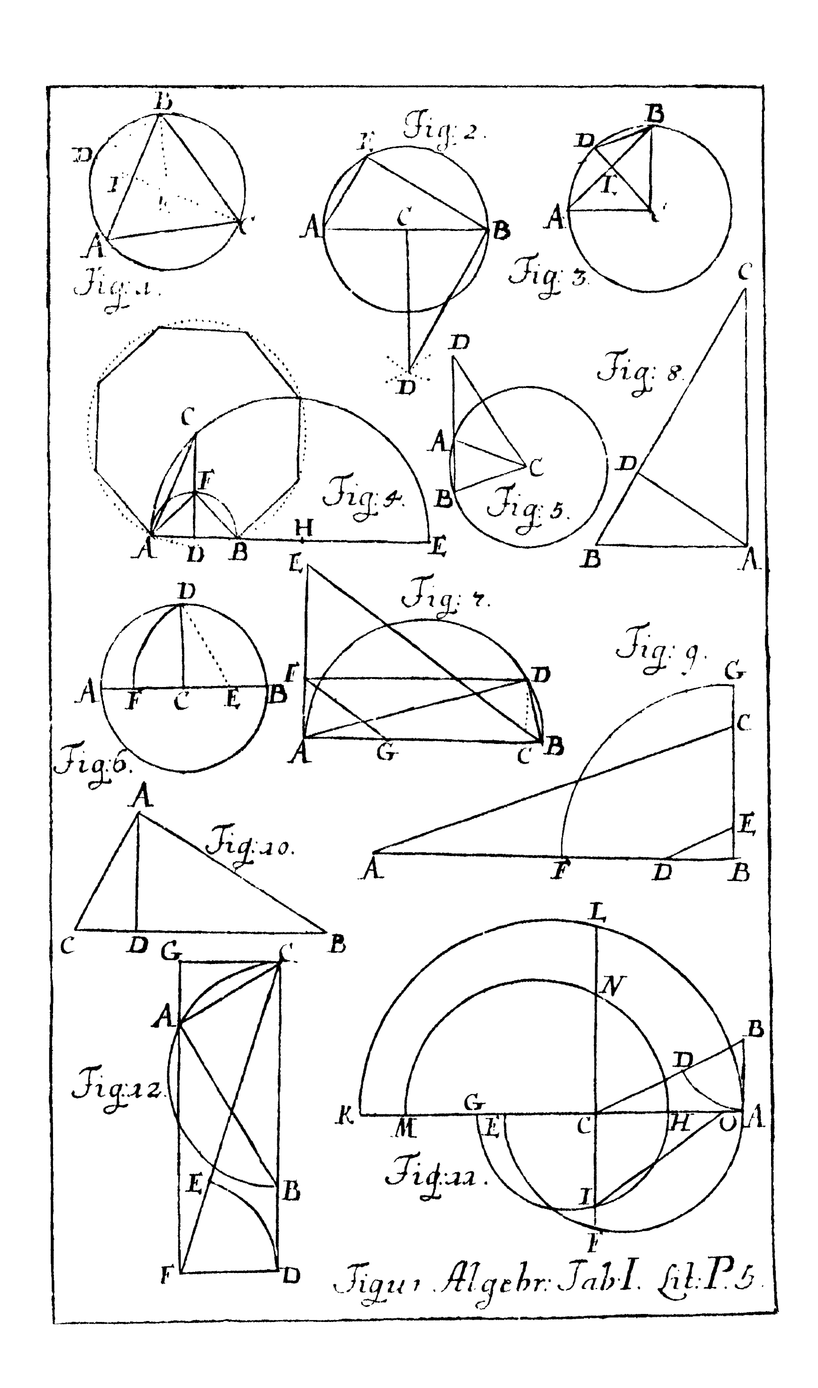
46. Weil in den hohl-Gläsern die Weite des Punctes, wo die gebrochenen Strahlen mit der Axe vereiniget werden, das Zeichen $-$ hat, so ist klar, daß derselbe auf der Seite, gegen den strahlenden Punct zu, gesucht werden muß, und dannenhero die Strahlen in dergleichen Gläsern von der Axe weggebrochen werden. Ob aber solches viel oder wenig geschehe, kan aus den gefundenen Regeln geurtheilt werden.

Anmerckung.

47. Aus diesen Exempeln könnet ihr sehen, wie die Algebra mit großem Vortheile in andern Wissenschaften angebracht wird, und werde ich bey anderer Gelegenheit noch ein mehreres zeigen.

ENDE der Algebra.




Fig: 1.
Fig: 2.
Fig: 3.
Fig: 4.
Fig: 5.
Fig: 6.
Fig: 7.
Fig: 8.
Fig: 9.
Fig: 10.
Fig: 11.
Fig: 12.
Figur Algebr: Tab I. Lit: P. 5.

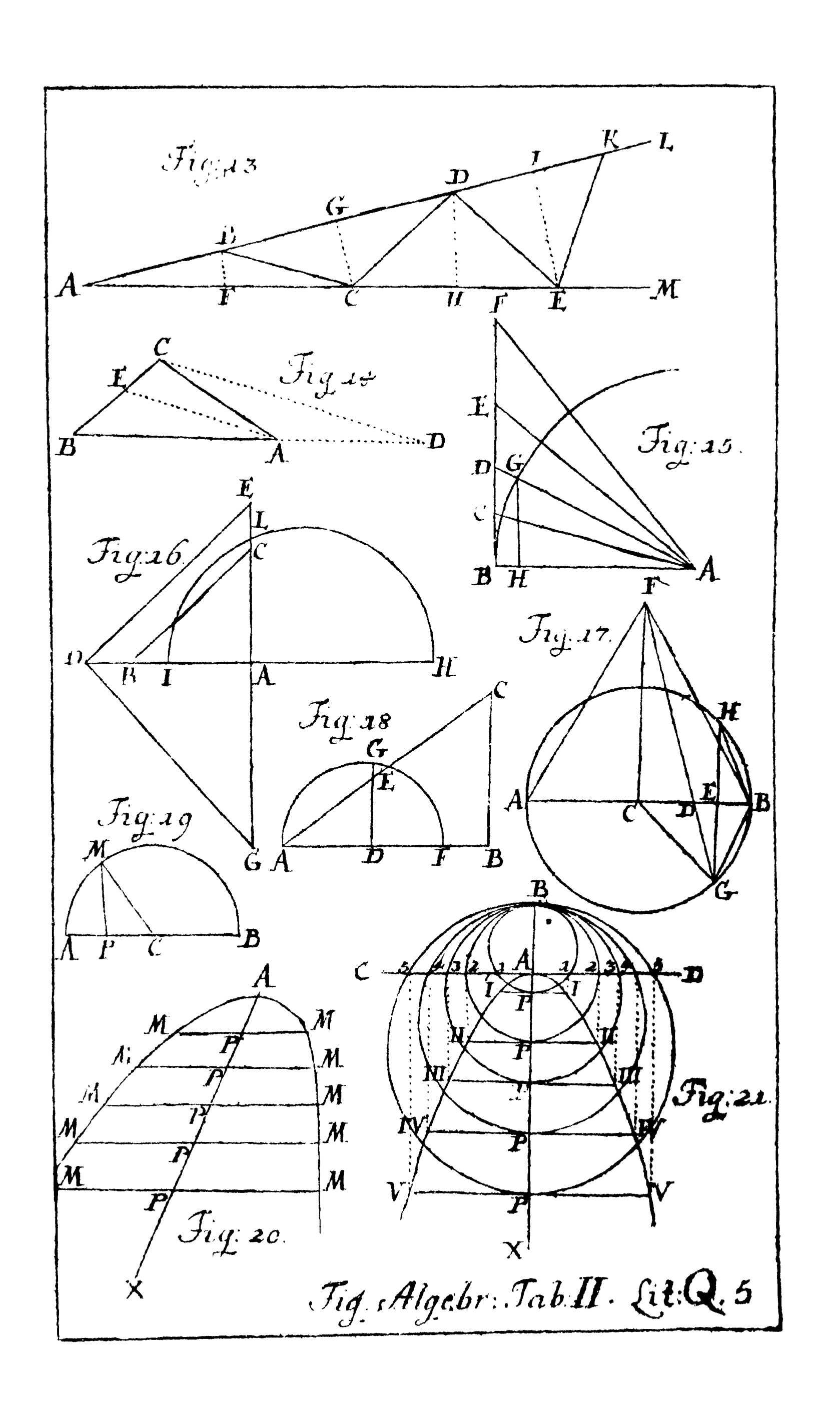
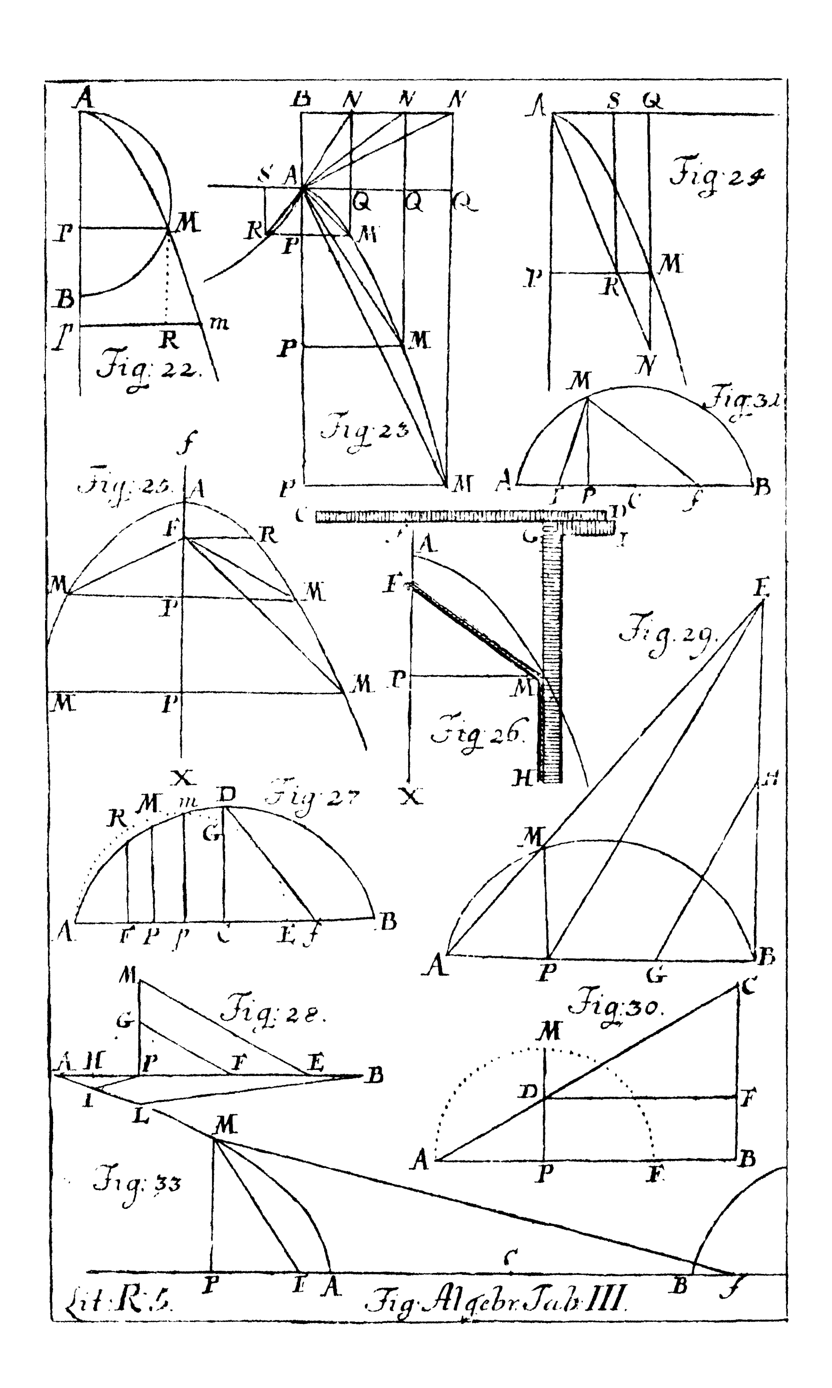
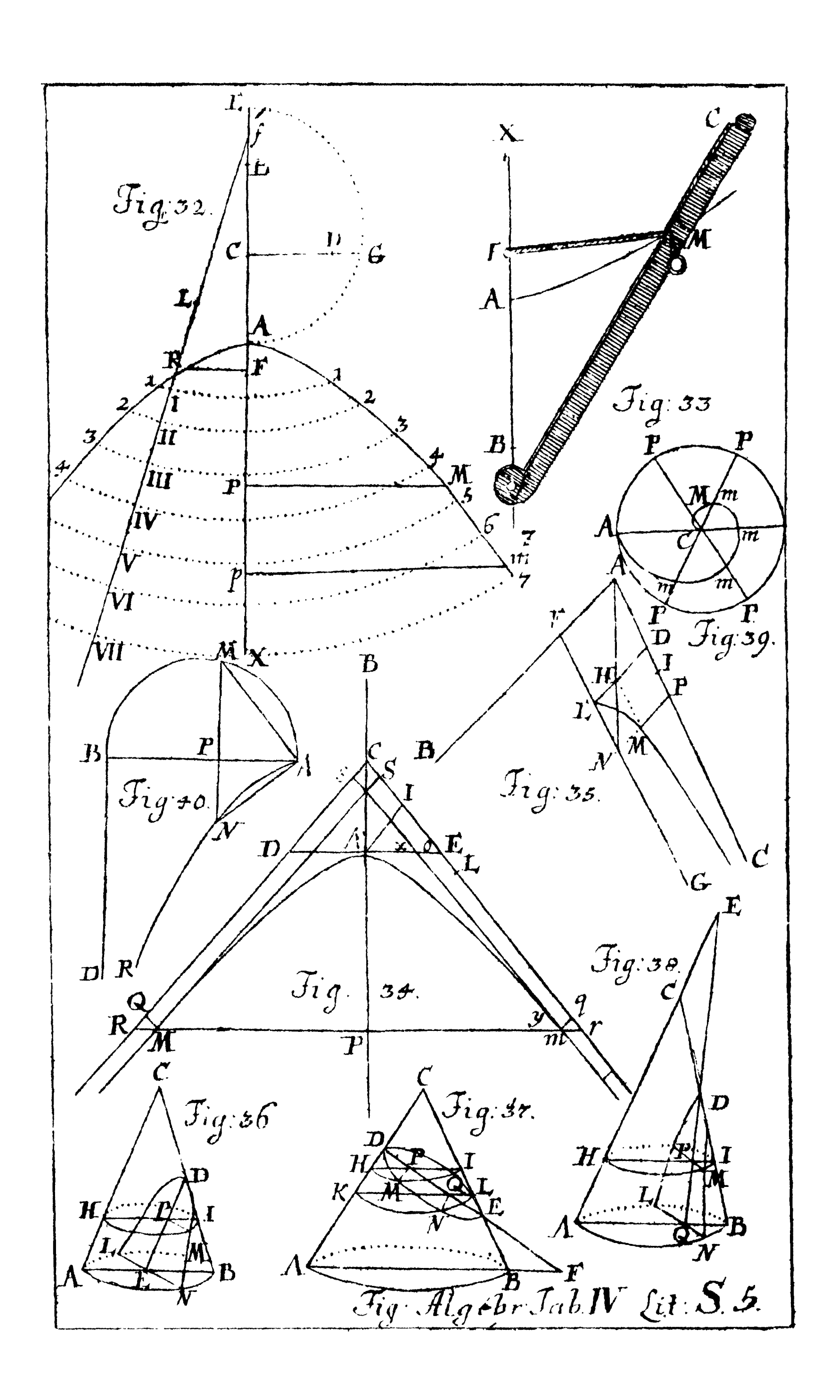
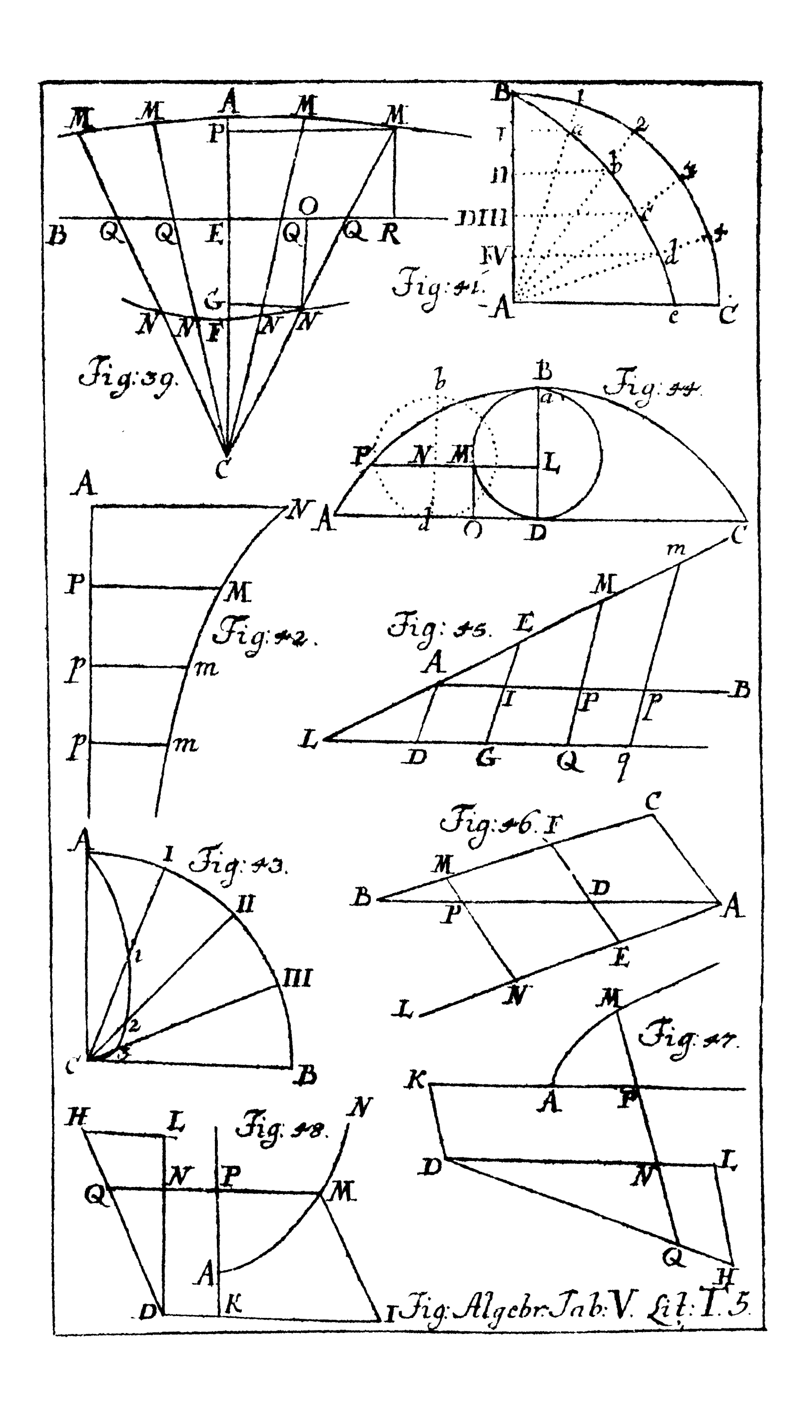


Fig. Algebr. Tab. II. Lit. Q. 5


Fig. 22.
Fig. 23
Fig. 24
Fig. 25.
Fig. 26.
Fig. 27
Fig. 28.
Fig. 29.
Fig. 30.
Fig. 31
Fig. 33
Lit. R. 5.
Fig. Algebr. Tab. III.


Fig: 32.
Fig: 33
Fig: 39.
Fig: 40.
Fig: 35.
Fig. 34.
Fig: 38.
Fig: 36
Fig: 37.
Fig: Algebr. Tab. IV Lit: S. 5.


Fig: 39.
Fig: 41.
Fig: 42.
Fig: 43.
Fig: 44.
Fig: 45.
Fig: 46.
Fig: 47.
Fig: 48.
Fig: Algebr. Tab: V. Lit: T. 5.



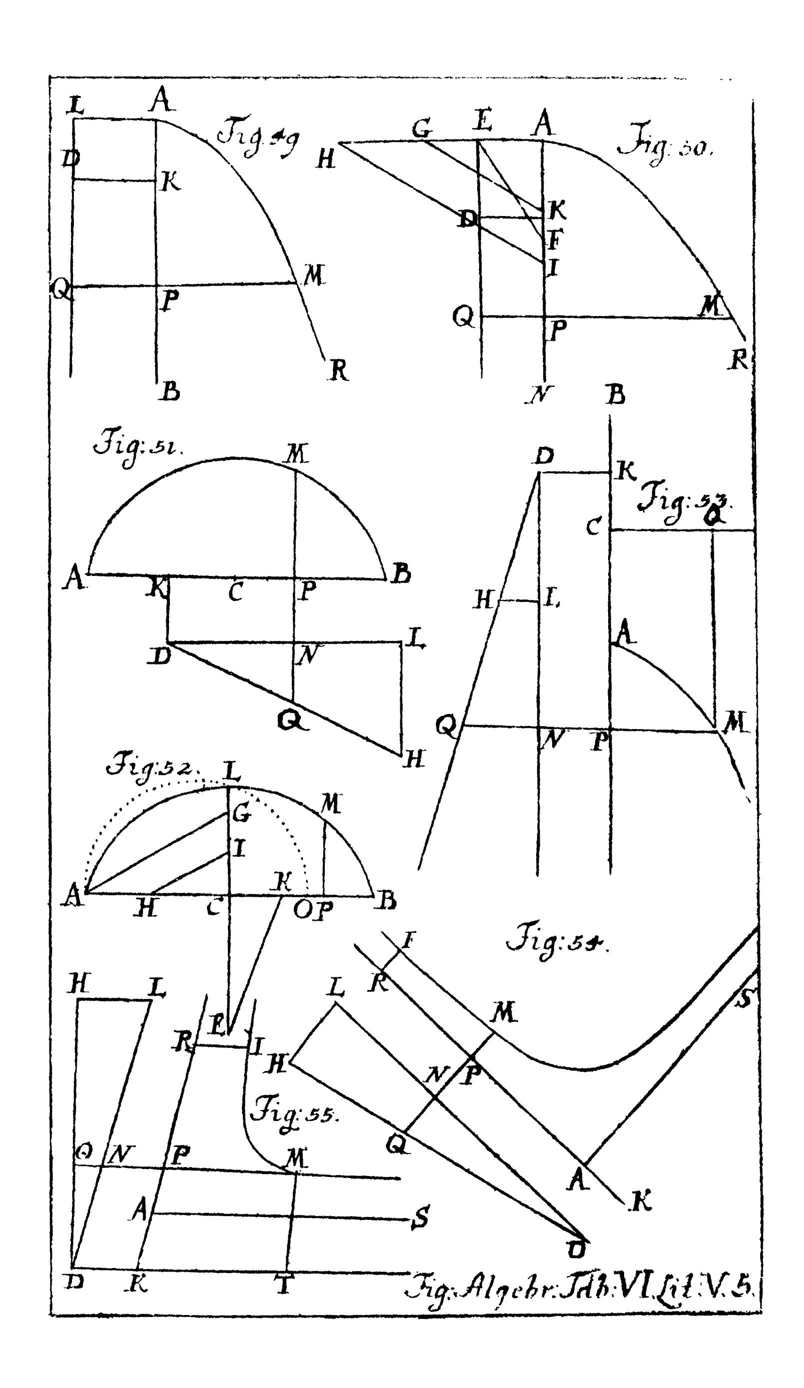
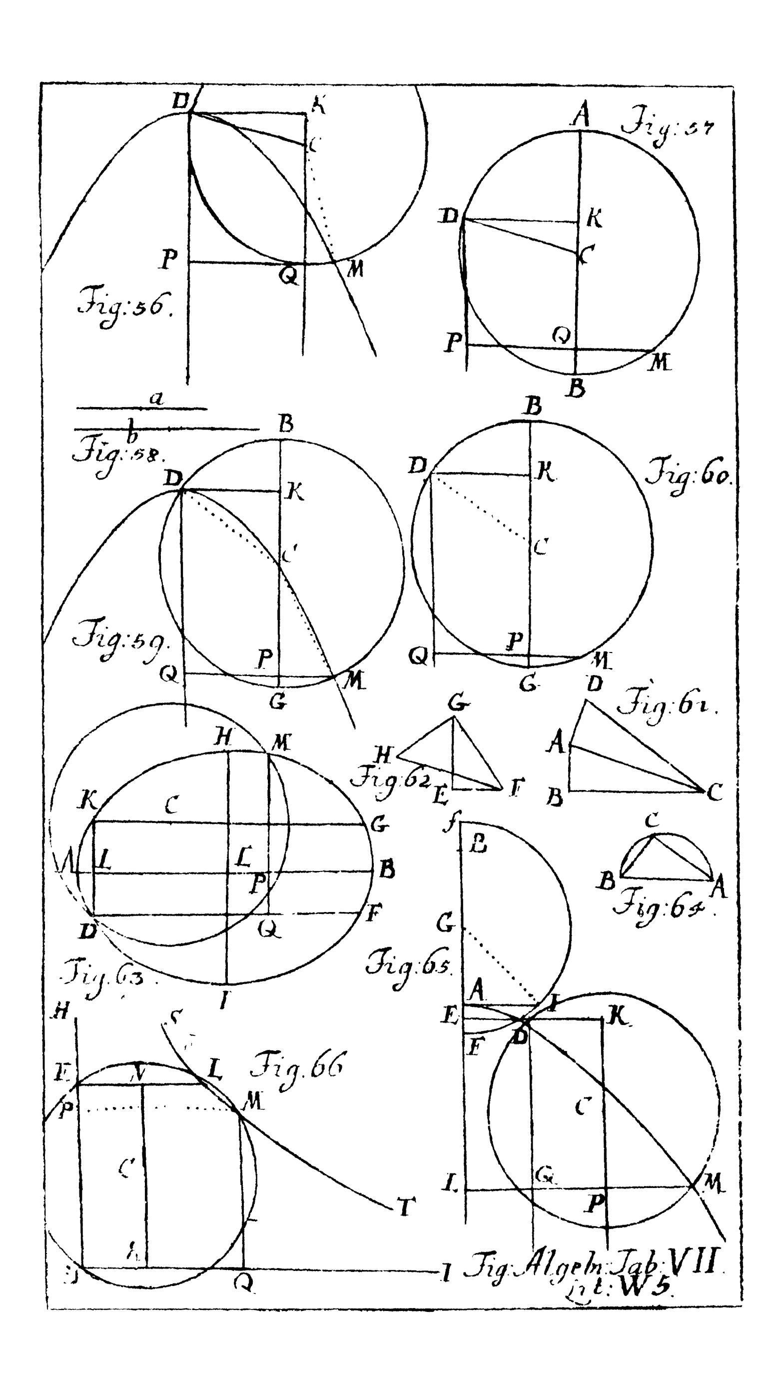
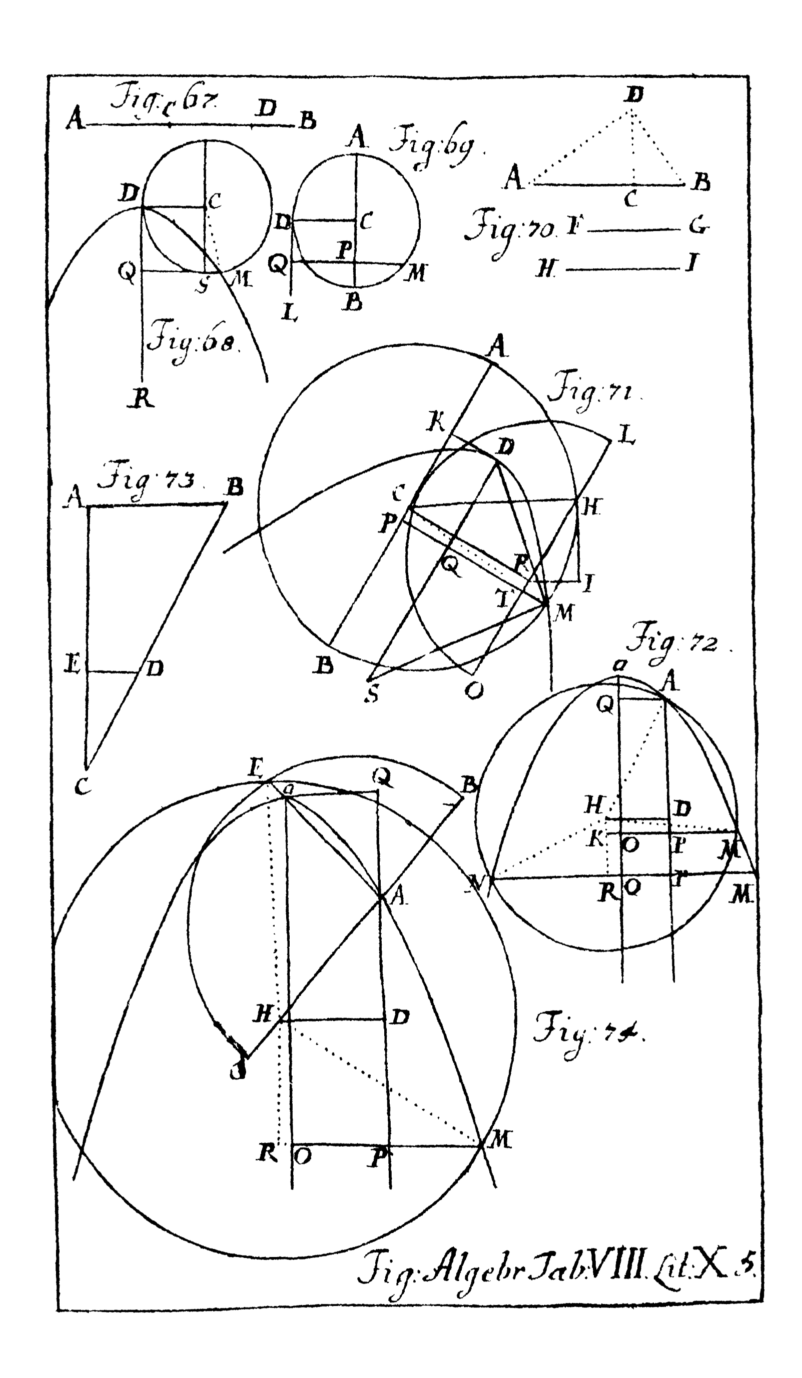
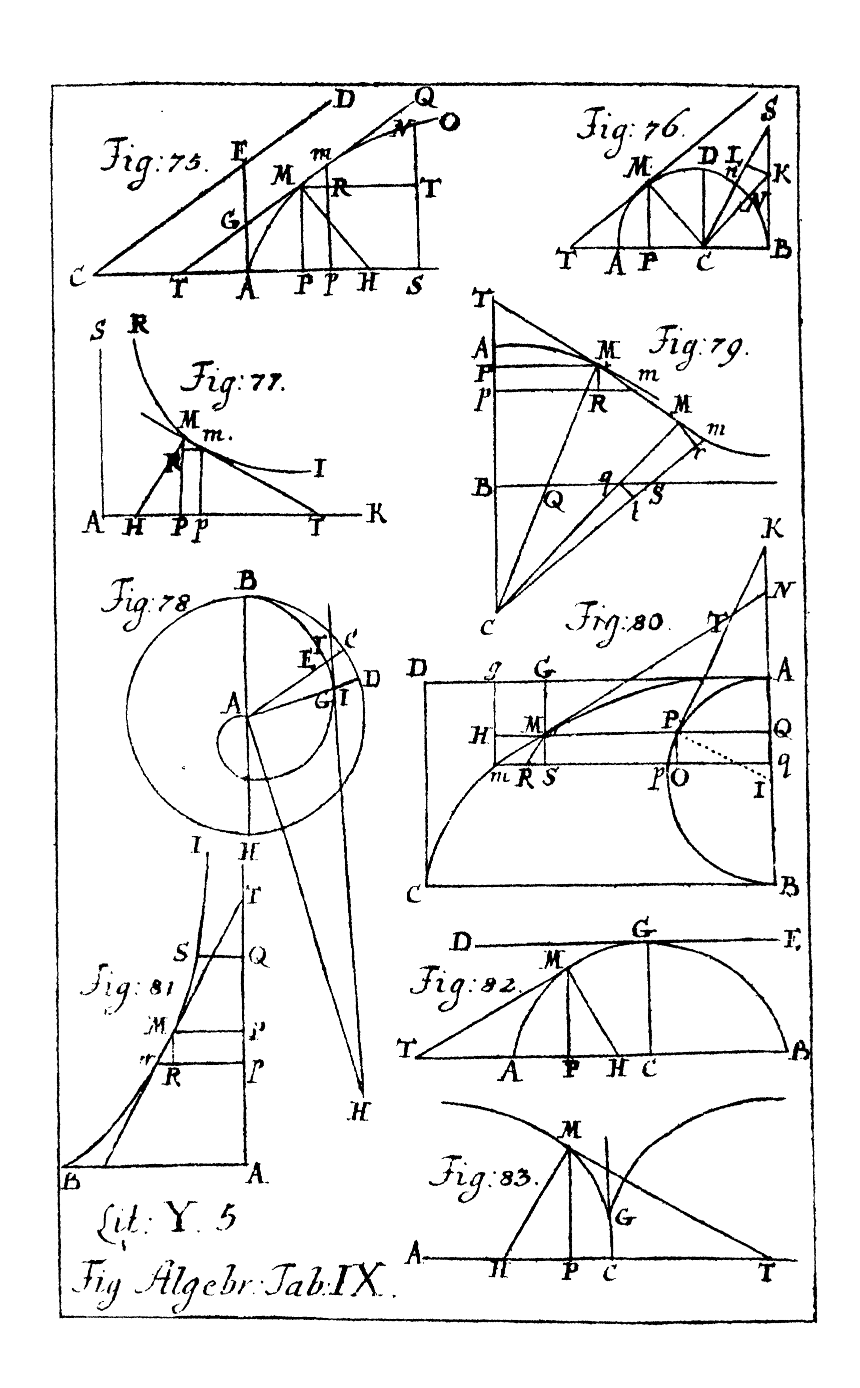
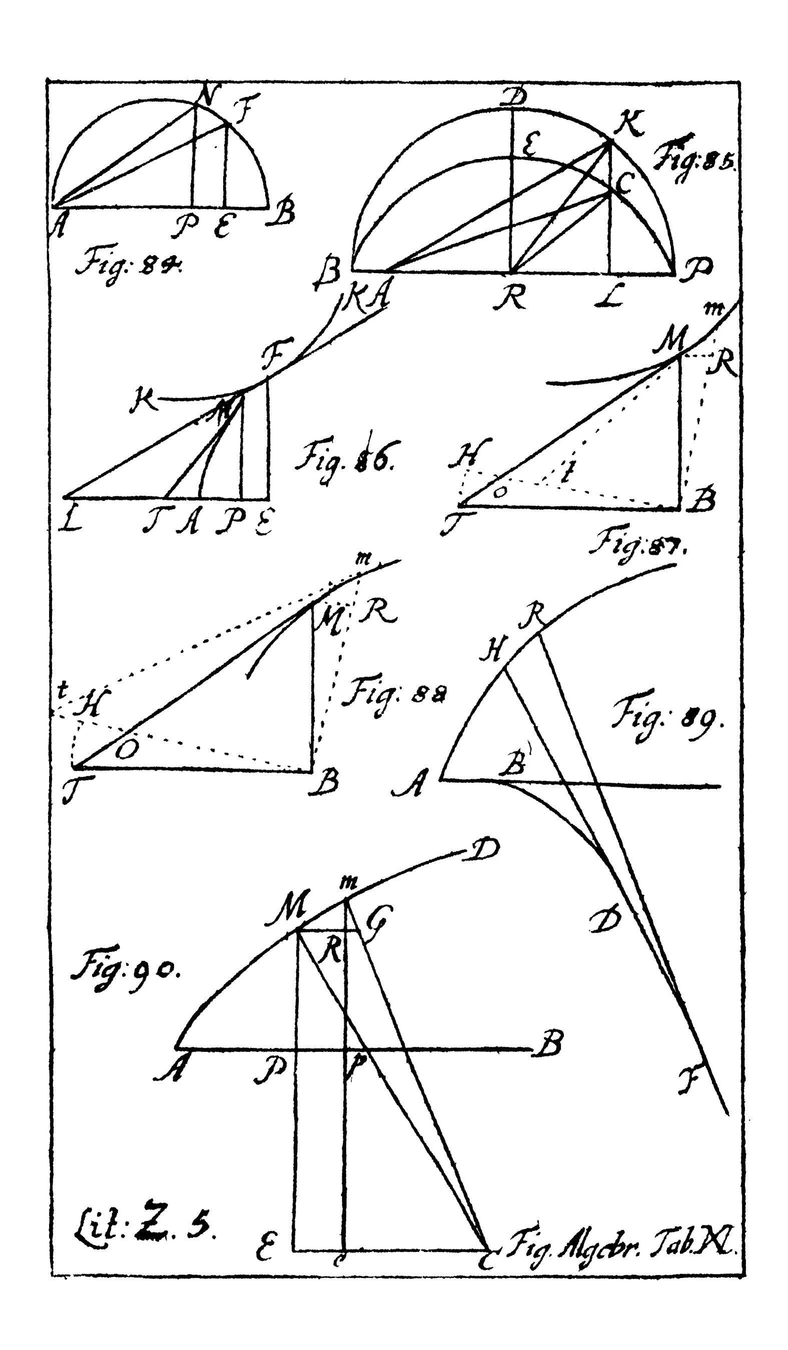


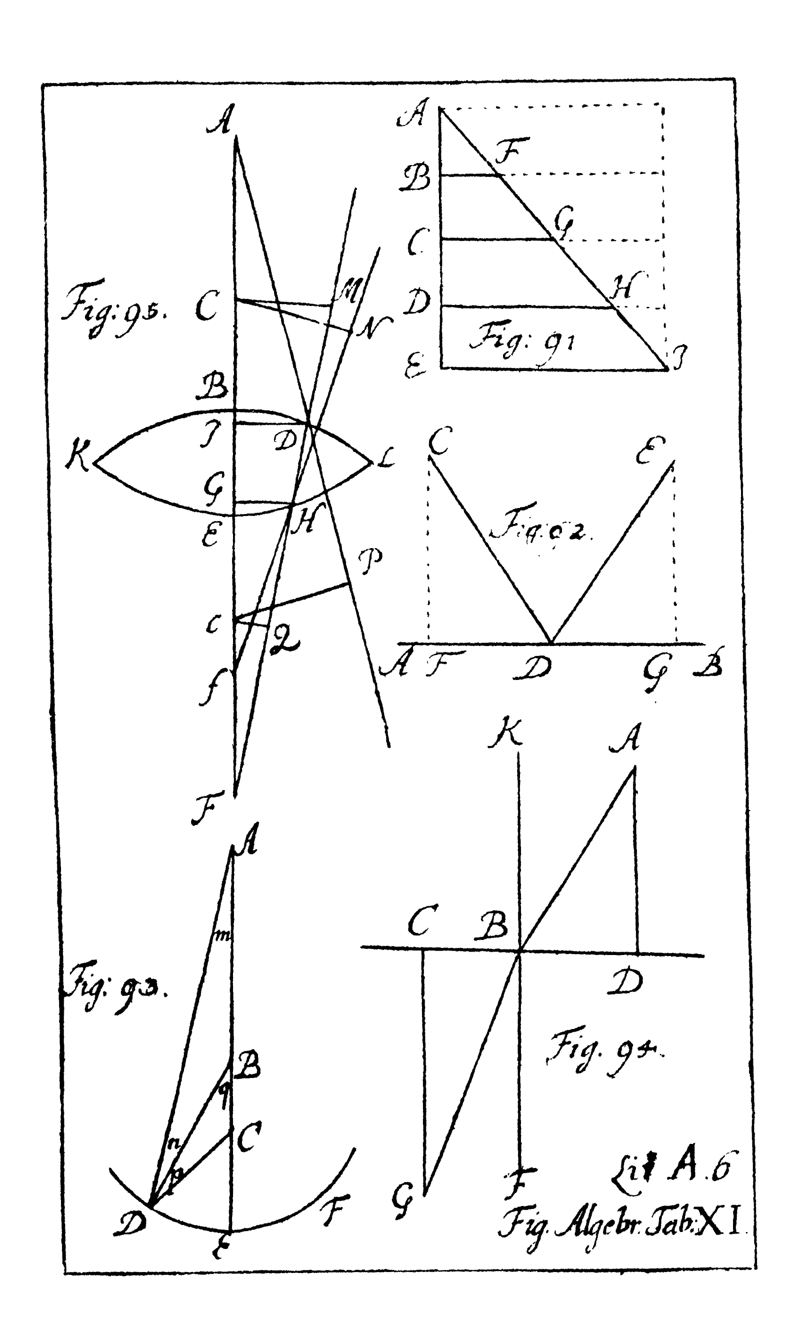
Fig. 49
Fig. 50.
Fig. 51.
Fig. 52.
Fig. 53.
Fig. 54.
Fig. 55.
Fig. Algebr. Tab. VI. Lit. V. 5.


Fig: 56.
Fig: 57
Fig: 58.
Fig: 59.
Fig: 60.
Fig: 61.
Fig: 62
Fig: 63
Fig: 64
Fig: 65.
Fig. 66
Fig: Algeb: Tab: VII
lit: W 5.


Fig: 67.
Fig: 68.
Fig: 69.
Fig: 70.
Fig: 71.
Fig: 72.
Fig: 73.
Fig: 74.
Fig: Algebr. Tab. VIII. Lit. X. 5.


Fig: 75.
Fig: 76.
Fig: 77.
Fig: 78
Fig: 79.
Fig: 80.
Fig: 81
Fig: 82.
Fig: 83.
Lit: Y. 5
Fig Algebr: Tab: IX.


Fig: 84.
Fig: 85.
Fig. 86.
Fig: 87.
Fig: 88
Fig: 89.
Fig: 90.
Lit: Z. 5.
Fig. Algebr. Tab. XI.


Fig: 95.
Fig: 91
Fig. 92.
Fig: 93.
Fig. 94.
Lit A. 6
Fig. Algebr. Tab: XI

Register

über

alle vier Theile

der

Anfangs-Gründe

aller

Mathematischen Wissenschaften



Register über alle vier Theile.

NB. Die Römische Zahl bedeutet den Theil, die dabey gesetzten Ziffern aber die Seiten. Wenn in dem Anfange keine Römische Zahl stehet; so ist der erste Theil zu verstehen; sonst aber derjenige, welcher vorher stehet.

Ab, III. 1489. 1491
Aban mah, III. 1487
Abdachung, II. 609
Abend, Erklärung, III. 1133. wie er zu finden sey, 1138
Abend-Demmerung, III. 1211. Ursachen, 1212. wie lange sie währet, 1213 wie das Ende auszurechnen sey, 1213. 1214
Abend-Stern, III. 1267
Abend-Uhren, Erklärung, III. 1527. Zeichnung, 1538
Abgekürzte Pyramide, wie sie perspectivisch zu zeichnen sey, III. 1069
Abgekürzter Kegel, wie sein Inhalt zu finden sey, 236
Abgesonderte Theile, III. 1088
Ablauf, Erklärung, 343. Zeichnung, 347. 530. Gebrauch, 350. 348
Abscisse, IV. 1678
Abschnitt des Circuls, wie er auszurechnen sey, 297
Abweichende Uhr, Erklärung, III. 1527. Zeichnung, 1537. & seqq.
Acht-Eck, wie seine Seite zu finden sey, IV 1649
Achtel-Carthaune, II. 533
Adar, III. 1489. 1491
Adar mah, III. 1487
Addiren, Erklärung, 41.

Regeln für gantze Zahlen, 42. 49. für gebrochene, 79. für Buchstaben, IV. 2556. 1557. für irrational-Zahlen, 1569. Probe, I. 51. 52. Zeichen, 53. IV. 1553
Adler, III. 1190
Adspecte, Erklärung, III. 1394. Zeichen und Bedeutung, 1594. 1595
Aehnlichkeit, 118. der Circul, 120. Figuren, 130. 194
Æquatio centri, Erklärung, III. 1315. wie sie zufinden sey, 1323
Aequation der Uhr, III. 1470
Æquatio optica, III. 1315
- - - *physica*, ibid.
Æquator, III. 1129. 1434
Aequinoctial-Uhr, Erklärung, III 1527. wie sie zuzeichnen sey, 1528. seq.
Æquinoctium, wie es zuobserviren sey, III. 1304
Æquatoris-Grade, wie sie in Zeit zuverwandeln seyn, III. 1163
Aera, III. 1493
Aerometrie, II. 877
Aestrich, wie es zuschlagen sey, 463
Aggregat, 41
Aiyar, III. 1489
Alcor, III. 1191
Algebra, IV. 1549
Algebraische Aufgaben in Zahlen, IV. 1571. in dem menschlichen Leben, 1581. in der gemeinen Geometrie, 1647. in der höheren, 1677
Algebraische Gleichung, Nutzen in Erklärung der krummen Linien, IV. 1677
Algebraische Linie, Erklärung, IV. 1678. Geschlechte, 1679. allgemeine Gleichung, 1681. Subtangens, 1813
Altar, III. 1190
Alternatio rationum, IV. 1634
Altitudo nonagesimi, III. 1220
Americanische Gans, III. 1190
Amplitudo occidua, Erklärung, III. 1169. wie sie zufinden sey, 1170. Nutzen, 1171
Amplitudo ortiva, Erklärung, III. 1170. wie sie zufinden sey, 1170. 1171. Nutzen, 1171
Amphora, III. 1143
Andreas, III 1191
Andromeda, III. 1190
Ancker in Mauern, 435
Angle de l'epaule, II. 618
- - *diminué*, ibid.
- - *du centre*, ibid.
Angulus acutus, 123
- - *ad Solem*, III. 1315
- - *obtusus*, 123

An-

Angulus orientis, III. 1220
- - *rectus*, 123
- - *refractionis*, III. 953
Anlage der Böschung, II. 609
Anlauf, Erklärung, 343. Zeichnung, 347
Anliegende Theile, III. 1088
Anmerckungen, 30
Anomalia coæquata, III. 1314
- - *orbis*, III. 1345
Antarctische polar-Circul, III. 1145
Antares, III. 1191
Antichthones, III. 1433
Antipodes, III 1433
Antinous, III. 1190
Aphelium, III. 1312. wie es zufinden sey, 1317. seine Bewegung, 1317
Apogæum, III. 1312. wie es zufinden sey 1332
Apollonische Parabel, IV. 1683
Approchen. Erklärung, II. 726. Beschaffenheit, 737. wie sie zuführen seyn, 729. zuhindern, 731
April, III 1484
Apsidum linea, III. 1312. 1314
Arabisches Jahr, III. 1490
Aræostylon, 395
Arcade, 393
Architrab. Erklärung, 342. wesentliche Glieder, 351. Höhe, 359. Ausladung, 361
Arcitenens, III. 1143
Arctische polar-Circul, III. 1145
Arcturus, III. 1190
Arcus inter centra, III. 1399. 1403
Arcus visionis, III. 1208
Ardabaheshr mah, III. 1487
Argonavis, III. 1190
Argument der Inclination, II. 1338
Aries, II. 1143
Arithmetica infinitorum, IV. 1644
Arithmetische Progression, IV, 1612
- - proportional-Zahlen, wie sie zufinden seyn, 98
- - Verhältniß, 72
Artillerie. Erklärung, II. 517. Nutzen, 515. 516. wie sie abzuhandeln sey, 515
Art zuzehlen, 46
Ascensional-Differentz. Erklärung, III. 1161. wie sie zuobserviren sey, 1161
Ascensio obliqua, III. 1161
- - *recta*, III. 1159
Asini, III. 1191
Astrolabium, 123
Astronomie. Erklärung, III. 1125. Nutzen, 1124
Astronomisches Fern-Glas, III. 1037
Astronomische Stunden, III. 1471

Asymptoten. Erklärung, IV. 1704. wie sie zufinden seyn, 1837

Athyr, III. 1485

Attaquen, II. 721

Attisches Jahr, III. 1489

Aufgabe, 28. wie sie algebraisch aufzulösen sey, IV. 1571. 1573

Aufgang der Sonne. Wie er zufinden, III. 1169

= = der Sterne, III. 1132. 1200

Auge, woraus es bestehet, III. 953. sqq. Veränderungen, welche bey dem Sehen darinnen vorgehen, 955. Beschaffenheit, wenn es in die Ferne und in die Nähe siehet, 958

Aufgemachte Thür, wie sie in das Perspectiv zubringen sey, III. 1073

Augen-Gläser, III. 1033

Augen-Punct, III. 1066

August-Monat, III. 1484

Augustus, III. 1484

Aufhebung eines Bruchs, 78

Aufriß. Erklärung, 509. wie er zumachen sey, 509

Ausladung, 340

Aussage, 22

Ausschnitt des Circuls, 187

Ausdehnen, II. 879

Aussen-Wercke, wozu sie dienen, II. 631. ihre Arten, 632. ihre Beschaffenheit, 636. Profil, 680

Aeußere Polygon, II. 616

Ausziehung der Wurtzeln. Erklärung, 83. Regeln, 86. 91. Probe, 88. 94

Axe der Laffeten, wie sie zuzeichnen sey, II. 550

Axiomata, 17

Axis mundi, III. 1129

Axis in peritrochio. Erklärung, II. 749. Eigenschaften, 778

Azimuth. Erklärung, III. 1169. wie solches zufinden sey, 1170. 1171

Azimuthal-Quadrant, III. 1169

B.

Babylonische Stunden, III. 1472

Back-Steine, 324

Bär, der kleine und grosse, III. 1190

Bäurisch Werck, 456

Bahn der Planeten, III. 1286. was sie vor eine Linie sey, 1311

Balcon, 449

Band, 344

Banquet, II. 608

Barometrum, II. 892

Baroscopium, II. 892

Bastart-Fenster, 437

Bastey, II. 613

Bastion, II. 613
Bathseba, III. 1191
Batterie. Erklärung, II. 733. Zeichnung, ibid.
Bau-Art der Alten, 337
Bau-Holtz, wie es beschaffen seyn soll, 318. wie es zufällen, 319. 320. zutrocknen, 320. in dem Baue zusetzen sey, 321
Bau-Kunst, 305
Bau-Meister, 305
Bau-Unkosten, wie sie in dem Festungs-Baue zurechnen seyn, II. 713
Bau-Zeug, 315
Bedeckung der Fern-Gläser. Erklärung, III. 1048. Nutzen, 1049. wie sie zufinden sey, 1049
Bedingung, 22. 23
Beheman mab, III. 1487
Begriff, 6. 8
Benennung, IV. 1571
Bequemlichkeit des Gebäudes, 306
Berge im Monde, III. 1255. 1256. ihr Schatten, 1257. ihre Grösse, 1383
= = in der *Venere*, III. 1267
Berme. Erklärung, II. 627
Beständige Defens-Linie. Erklärung, II. 619. Grösse, 619. 620
Bewegliche Feste, III. 1509
Bewegung, Regeln insgemein, IV. 1915. insbesondere für die schwehren Cörper, 1917. 1919. wie sie gesehen wird, III. 956. 981. 982. 984
Bewegung des Mondes, III. 1139. 1353
= = der Planeten, III. 1284
= = der Sterne, wie vielerley sie sey, III. 1140
Bewegungs-Kunst, II. 745
Beweis, 24. 27
Bey einander, wenn die Bilder zweyer Sachen gesehen werden, III. 979. 980
Bild im Auge, wie es beschaffen sey, III. 955
Binomische Wurtzel, IV. 1586
Biquadratische Gleichung, wie sie geometrisch zuconstruiren sey, IV. 1769. 1770
Blätter, wozu sie in der Bau-Kunst gebraucht werden, 354
Blondells Fortification. Maximen, II. 663. Ausrechnung der Linien und Winckel, 665. Zeichnung, 670. Profil, 672
Boden-Stücke, II. 542. 543
Bock in der Artillerie, II. 551

Böschung, II. 609
Bogen, wie er auszurechnen sey, 296. wie daraus der Sinus zufinden, IV. 1875. 1877. wie der Tangens zufinden, 1871
Bogen in Arcaden. Wie er beschaffen sey, 393. 400
Bogen-Schuß, III. 563
Bogen-Stellung. Erklärung, 383. Zeichnung, 408. Einrichtung, 412
Bogen zwischen den Mittel-Puncten, III 1399. 1403
Böller, II. 564
Bollwercke. Erklärung, II. 613. Figur, 614. 615
Bollwercks-Winckel. Erklärung, II. 618. Grösse, 620
Bolzen, II. 550
Bombe, II. 569. 570 571
Bootes, III. 1190
Boussole, 215. 219
Borten, 342
Brach-Monat, III. 1484
Brand-Röhre in der Bombe, II. 569. Carcasse, II. 575
Brand-Maure, 435
Breite des Flusses, wie sie zumessen sey, 146
= = des Mondes, wie sie zufinden sey, III. 1369
= = der Planeten, wie sie observirt wird, III. 1283. 1286. wie sie zufinden sey, 1346. 1347
Breite des Sternes. Erklärung, III. 1183. wie sie zufinden sey, 1184. ob sie veränderlich sey, 1195
= = eines Orts. Erklärung, III 1440. wie sie zufinden sey, 1440
Brenn-Glas, III. 1019 1020
Brenn-Punct. Erklärung, IV. 1685. wie er zufinden sey in der Parabel, 1685. in der Ellipsi, 1685. in der Hyperbel, 1699. 1700. in den Brenn-Gläsern, III. 1019. 1020. 1021
Brenn-Spiegel, III. 1006. 1007. 1008. 1021
Brille. Zeichnung, II. 672. 680. 681. Profil, 681
Bruch. Erklärung, 76. wie er geschrieben wird, 77. sein Werth, 77. Veränderungen, 78. Rechnung, 79. Logarithmus, 269. 270. wie unendliche zusummiren, IV. 1642. wie sie aus Gleichungen wegzuschaffen, IV. 1738
Brust-Felgen, II. 785
Brust-Lehne 453
Brustwehr, II. 608. 609
Büchsenmeisterey-Kunst, II. 517

Buch-

Buchstaben-Rechenkunst, IV. 1550

C.

Calendæ, III. 1485
Calender, wie er zu machen sey, III. 1513. 1514
Caliber, II. 535
Caliber-Stab. Erklärung, II. 535. Zubereitung, 538
Camera obscura, III. 959
Camin, wie er zubauen, 481
Cancer, III. 1143
Canonen-Schwefel, II. 520
Canun, III. 1489
Capella cum haedis, III. 1191
Caper, III. 1143
Capitäl. Erklärung, 341. wesentliche Glieder, 351. Höhe 360. Auslaufung, 361
Capital-Linie, II. 617
Caponieres, II. 639
Carcassen, II. 575
Cardinal-Gegenden, III. 1454
Carthaune, II. 532. 533. 553
Casleu, III. 1491
Cassiopeja, II 1190
Castelle, II. 699
Castor, III. 1191
Catalogi fixarum, III. 1188. 1189
Catoptrick, III. 989
Centaurus, III. 1190
Centri-Winckel, II. 618
Centrum, 121
- - *gravitatis*, II. 754
- - *magnitudinis*, ibid.
Cepheus, III. 1190
Chaldäischer Scrupel, III. 1478
Chamæleon, III. 1190
Characteres chronologici, III. 1493
Chemin couvert, II. 637
Chojac, III. 1485
Chorda, 121
Chordad mah, III. 1487
Christ-Monat, III. 1484
Chronologie, III. 1469
Circul. Erklärung, 121. Eigenschaft, 122. 182. 184. IV. 1672. 1830. 1831. Eintheilung, 121. Ausrechnung, 182. 184. Beschreibung, 164. Quadratur, IV. 1853. Rectification, 1870. Subtangens, 1801. wie er ins Perspectiv zubringen sey, III. 1068
Circul der Länge und Breite, III. 1183
Circul von höheren Geschlechten, IV. 1698. 1811
Circul-Bogen, 129. 161

Circuli diurni, III. 1133
Circumvallations-Linien, II. 723
Cissois. Erklärung, IV. 1714. Eigenschaft und Gleichung, 1715
Citadellen. Erklärung, II. 699. Beschaffenheit, 700. Zeichnung, 701
Citationes, 25. seq.
Climata, III. 1450. 1452
Coäquirte Anomalie. Erklärung, III. 1314. wie sie zufinden sey, III. 1322. 1324
Cörper. Wie er perspectivisch zuzeichnen sey, III. 1069
Cörper von leichterer Art, II. 843
- - von schwehrerer Art, II. 844
Cörperlicher Inhalt, wie er zufinden sey, 225
- - Ort, IV. 1756
Colonnata. Erklärung, 393. Beschaffenheit, 396. 398
Cometen, was man von ihnen observirt, III 1389. ihre Natur, 1392. ihr Ort, 1391. und Schweif, 1392
Commutations-Winckel, III. 1344
Compositio rationum, IV. 1633
Conchilis, IV. 1713
Conchois. Erklärung, IV. 1713. Gleichung, 1713. 1714. Asymptote, 1713. Subtangens, 1823. Wendungs-Punct, 1907
Conus. Erklärung, 127. Eigenschaften, 127. II. 846. IV. 1675. 1838. Ausrechnung, IV. 1862. 1878
Conischer Spiegel. Erklärung, III. 990. wie sie zumachen seyn, 997. Eigenschaften, 1000. 1001
Conjunction, III. 1394
Contra-Minen, II. 640
Contravallations-Linien, II. 723. 725
Contreguarde. Erklärung, II 633. Zeichnung, 662. Nutzen, 633
Contrescarpe. Erklärung, II. 636. wie sie zuerobern sey, 735. 737
Conversio rationum, IV. 1634
Corinthische Ordnung. Erklärung, 358. Glieder, 377
Cornea, III 954
Corollaria, 28. 29
Cortine, II. 615
Cosinus, 262
Cosinus, III. 1190
Crepusculum matutinum, III. 1211
- - *vespertinum*, III. 1211

Creutz-Gewölbe, 471. 472
Cubatur, IV. 1878
Cubic-Maaß, 226
Cubic-Ruthe, Schuh, Zoll, Linie, 227
Cubic-Wurtzel. Erklärung, 83. 84. wie sie auszuziehen sey, 91. IV. 1593. ihr Logarithmus, 271
Cubic-Zahlen. Ihre Differentien, IV. 1606. 1607. ihr Logarithmus, 271
Cubiren, IV. 1878
Cubische Gleichung, wie daraus die Wurtzel zuziehen sey, IV. 1735. wie sie geometrisch zuconstruiren sey, 1769
Cubus. Erklärung, 127. Eigenschaften, 127. wie sein Inhalt auszurechnen sey, 225
Curtirte Weite. Erklärung, III. 1339. wie sie zufinden sey, 1342
Curtirung, III 1339
Crystallene Feuchtigkeit, III. 955
Cyclois. Erklärung, IV. 1717. Eigenschaften, 1717. Subtangens, 1825
Cyclus indictionum, III. 1503
- - *Lunae*, III. 1498
- - *Solis*, III. 1495
Cylinder. Erklärung, 126. Eigenschaft, 126. 227. II. 845. IV. 1682. Ausrechnung, 231. 244. 245 Netze, 255
Cylindrische Spiegel. Erklärung. III. 990. wie sie zumachen seyn, 997. Eigenschaften, 999

D.

Dach. Erklärung, 418. Höhe, 498. Arten, 499. 471. Materie, 500
Dach *à la mansarde*, 499
Dampf-Kugel. Erklärung, II. 577. wie sie zumachen sey, 580
Dauerhaftigkeit des Bau-Zeuges, wie sie zubeurtheilen sey, 316
- - des Gebäudes, wie sie zubeurtheilen sey, 308
David, III. 1191
December, 1484
Declination eines Sternes. Erklärung, III. 1152. wie sie zufinden sey, 1152. ihr Nutzen, 1153. seq.
- - der Ecliptick, III. 1154. 1156
Declinirende Uhren, III. 1527
Decke, 467. 468
Deckel, 341
Defendirende Linie, II. 602

Defension, wie sie einzurichten sey, II. 601
Defens-Linie, II. 602
Definitio, 5
- - *nominalis & realis*, 6
les Dehors, II. 631
Delphin, III. 1190
Delphine in der Artillerie, II. 542
Demonstrationes, 27
Demigorge, II. 617
Demilune, II. 633
Descensional-Differentz, II. 1161
Deutlich, wenn die Sachen gesehen werden, III. 957
Deutlicher Begriff, 7
Diabetes, II. 931
Diagonal, 173
Diameter. Erklärung, 121. Verhältniß zur Peripherie des Circuls, 183. 184. 297
Diameter der Planeten, wie er zufinden sey, III. 1377. 1378
- - einer krummen Linie, IV. 1677
- - der Erde, wie er zumessen sey, III. 1435. 1436
Diastylon, 395
Dicksäulig, 395
Dielen, 461. 462
Differentia ascensionalis, III. 1163
Differential-Grösse, IV. 1801. wie sie zudifferentiiren sey, 1802
Differential-Rechnung, IV. 1799
Differentiiren. Erklärung, IV. 1802. Regeln für die veränderlichen Grössen, 1802. für die Exponential-Grössen, 1894. für die Differential-Grössen, 1900
Differentio-differentiiren, IV. 1900
Differentz, 42
Dignität. Erklärung, IV. 1562. Eigenschaften, 1698. 1611. allgemeine Regel für dieselben, 1602
Di mab, III. 1487
Dioptrick, III. 1014
Directions-Linie, II. 752
- - - - der schwehren Cörper, II. 759. 760
Directus, III. 1285
Distantz-Punct, III. 1066
Dividendus, 44
Dividiren. Erklärung, 43. 44. Regeln für gantze Zahlen, 64. 65. für gebrochene, 82. für Buchstaben, IV. 1561. für irrational-Zahlen, 1571. wie es ohne das ein mal eins geschiehet, 68. Zeichen, 72. IV. 1555
Divisio rationum, IV. 1634
Divisor, 44
Dodecaëdrum. Erklärung, 252. Netze, 253. 254

Doppelt, wenn etwas gesehen wird, III. 987
Doppelte Ecken = Zierde, 448
= = Hohlkehle, 347
Dorado, III. 1190
Dorische Ordnung. Erklärung, 357. Glieder, 367
Drache, III. 1190
Drachen-Kopf, III. 1353
Drachen-Monat. III. 1353
Drachen = Schwantz, III. ibid.
Dreyeck. Erklärung, 123. Eigenschaften, 129. wie seine Höhe zu finden sey, IV. 1658. 1659
Dreyviertel-Carthaune, II. 533. 553. 562
Drossirung, II. 609
Druck der flüßigen Cörper, II. 849
Druckwerck, II. 920
Dulbeggia, III. 1491
Dulkaadah, III. 1491
Dunckel, warum ein Cörper aussiehet, III. 976
Dunckeler Begriff, 7
Durchmesser, 121
Durchmesser des Gebäudes, 510
= = einer Festung, II. 656

E.

Ebener Ort, IV. 1756
Excentricität. Erklärung, III. 1312. wie sie zu finden sey, 1315. 1332. ihre Grösse, 1347
Eccentrische Anomalie, III. 1314
Eccentrischer Circul, III. 1314
= = Ort des Planeten, III. 1343
Ecken = Zierde, wie sie zu zeichnen sey, 447. 448
Eclipeick. Erklärung, III. 1142. 1433. Eintheilung, 1142. grosse Declination, 1154
Egyptisches Jahr, III. 1485
Eigene Bewegung, III. 1141
Einfache Ecken = Zierde, 447
Einfacher Ort, IV. 1756
Einfallendes Licht, 438
Einfalls-Winckel, III. 951
Ein mal eins, 57 58. 60. III. 1192
Eintheilung des Gebäudes, wie sie zufinden sey, 477
Einziehung, 432
Einziehung der Mauern, 432
Elastische Kraft der Luft, II. 882. 885
Element einer Fläche, IV. 1843
Elephant, III. 1192
Ellipsis. Erklärung, IV. 1689. 1690. Eigenschaften, 1690. 1830. 1831. 1834.

1834. 1856. 1857. 1858. Gleichung, 1690. Beschreibung, 1695. Quadratur, 1856. 1857. Subtangens, 1812. wie sie aus dem Kegel geschnitten wird, 1711. ist die Bahn der Planeten, III. 1310
Ellipses von höheren Geschlechtern, IV. 1697. 1698. 1812
Elliptische After-Kugel, IV. 1881
Elongations-Winckel, III. 1344
Elul, III. 1489. 1491
Entgegensetzung, III. 1394
Entfernung von dem Ruhe-Puncte, II. 753
Erde, ihre Figur, 1431. 1433. Grösse, 1435. 1436. Bewegung, 1296. Ist ein Punct in Ansehung der Welt-Kugel, 1147. wie groß sie im Monde gesehen wird, 1385. wie sie daselbst aussiehet, 1386. ihr ab- und zunehmendes Licht, 1385. 1386. wie starck sie den Mond erleuchtet, 1379
Erd-Finsterniß, III. 1257
Erd-Kugel, wie sie zuverfertigen sey, III. 1457. ihr Gebrauch, 1459
Erdreich, wie seine Beschaffenheit zuerforschen sey, 421. wie das lockere zu befestigen sey, 422
Erfahrungen, was sie sind, 18. ihre Beschaffenheit, 18. 19. wenn man sie anführen muß, 20. 21
Erhabener Spiegel. Erklärung, III. 989. wie er zumachen sey, 996. Eigenschaften, IV. 1932
Erhabenes Glas. Erklärung, III. 1016. Eigenschaft, 1018. 1021. 1025. 1029
Eridanus, III. 1190
Erkänntniß der Natur, wie sie beschaffen sey, III. 1295
Erklärung, 5. 6. wie sie bey den Mathematicis beschaffen sey, 8
= = der Wörter, 6. 8. 9. 10. 11. 12
= = der Sachen, 6. 12. 13
Erleuchtung der Kugel, III. 963
Epacta, Erklärung, III. 1500. wie sie zufinden sey, 1502. 1503
Epocha, III. 1493
Epiphi, III. 1485
Equuleus, III. 1190
Esphandarmod mah, III. 1488
Esplanade, III. 637
Europäische Stunden, III. 1472

Eurythmie. Erklärung, 313. Grund, 313. 314. Gebrauch, 314
Eustylon, 395
Evolute, IV. 1909
Exponens rationis, 73
Exponential-Grössen. Erklärung, IV. 1894. wie sie zudifferentiiren sey, 1894. wie sie zutegriren sey, 1898
Exponential-Linien, IV. 1895
Exponential-Rechnung, IV. 1894

F.

Faces. Erklärung, II. 615. Grösse, 625
Fackeln der Sonne, III. 1237
Factores, 43
Factum, 43
Fässer, wie sie zuvisiren seyn, 248
Falckaune, II. 533. 553
Falsche Wage, wie sie zuerkennen, II. 766. zugebrauchen, 766. zubessern sey, 768. 769
Familie der algebraischen Linien, IV. 1680
Farben, wie sie entstehen,
- - des Mondes in Finsternissen, III. 1250. 1251
Farbigte Haut, III. 954
Faschinen, II. 738
Februarius, III. 1484
Feder, wie dadurch Maschinen zubewegen seyn, II. 832. 833
Felder-Decke von Holtze, 467
- - von Gypse, 469
Feldmessen, 220. 222
Feld-Schantzen. Erklärung, II. 701. Grund-Risse, 702. 703. 704. 705. 706. Profil, 701
Fenster. Erklärung, 435. Beschaffenheit, 435. 436. Höhe und Breite, 436. 438. 440. 441. wie sie über einander zusetzen, 441. zubauen, 442. 453. zuzieren, 442. in das Perspectiv zubringen seyn, III. 1072. wie viel in ein jedes Gemach gehören, I. 475. 476
Fenster-Creutz, 436
Fern-Glas. Erklärung, III. 1031. Erfinder, 1032. Röhren dazu, 1033. 1034. Gestelle, 1042. wie viel es vergrössert, 1046. warum die grossen mehr vergrössern, 1047. seq.
Fern-Glas in der Astronomie, III. 1037. 1045. auf der Erden, III. 1042. 1043. 1044
Fervardin mah, III. 1487,

Feste, III. 1509
Fester Cörper. Erklärung, II. 843. wie viel er sich eintauchet, 866
Festigkeit des Gebäudes. Erklärung, 306. wie sie zubeurtheilen sey, 308. wie sie zubeobachten sey, 334. 336
Festung, wie ihre Vollkommenheit zubeurtheilen sey, II. 597. wie sie abzustecken sey, 714
Feuer-Ballen, II. 577
Feuer-Kugeln. Erklärung, II. 576. Arten, 577 wie sie zubinden, 578. und zutaufen seyn, 579
Feuer-Kugel-Zeug, II. 576
Feuer, wie dadurch Maschinen zubewegen seyn, II. 833. 834
Feuer-Maure. Erklärung, 502. wie sie nicht raucht, 503
Feuerwercker-Kunst, II. 517
Figuren. Eigenschaften, 130. Aehnlichkeit, 194. seq. Grundlegung, 210. Ausrechnung, 173 - - 187
Figuren des springenden Wassers, II. 926
Fische, III. 1142. 1190
Fisch, der fliegende, III. 1190
- - der südische, III. 1190
Fixstern. Erklärung, III. 1143. Bewegung, 1195. Natur, 1387. parallaxis, 1302. 1303
Fläche der Cörper, wie sie zufinden sey, IV. 1861. 1862. wie sie perspectivisch zuzeichnen sey, III. 1066. wie ihre Abweichung von Süden, Norden und dem Horizont zufinden sey, 1525
Flanc, II. 615
Flanque. Erklärung, II. 615. ihre Lage, 621. Figur, 621. 622. 623. Zahl, 622. 623
Flecken in der Sonne, III. 1233. 1234. 1235. wie sie zuobserviren seyn, 1238
Flecken in der *Venere*, III. 1268
- - in dem Jupiter, III. 1268
- - in den Jupiters-Monden, III. 1272
Fliege, III. 1190
Fliegender Fisch, III. 1190
Flüssige Materie. Erklärung, II 843. ihr wagerechter Stand, 846. 847. ihr Druck, 849. 850
Flug, II. 564
Fluß *Eridans*, III. 1190
Focus, IV. 1655
Fomahant, III. 1191
Fons Heronis, II. 939

Fortification. Erklärung, II. 597. Grund-Regeln, II. 598
Frieß. Erklärung, 342. Beschaffenheit, 361. Höhe, 361
Fronton. Erklärung, 410. Beschaffenheit, 410. Höhe, 411. Zeichnung, 412. 413
Frühling, III. 1444
Fünf-Eck. Erklärung, 125. wie seine Seite zufinden sey, IV. 1653. wie es geometrisch zubeschreiben sey, 1654
Fuhrmann, III. 1190
Fundamental-Linie, III. 1066
Futter-Mauern bey Festungen, II. 718
Fuß der Seule, 341. des Seulen-Stuhls, 341
Fuß-Gesimse. Erklärung, 341. wesentliche Glieder, 351. andere Glieder, 352. Höhe, 358. Auslaufung, 360. 361
Fuß-Mörser, II. 565
Fuß-Riegel, II. 550

G.

Gallerie, II. 738. 739
Galliläanisches Fern-Glas, III. 1033
Gebäude. Erklärung, 306. wie davon gründlich zu urtheilen, 306. Unterscheid, 306. wie seine Eintheilung zufinden sey, 459. 476. 478
Gebrochener Winckel, III. 953
Gebälcke, 339
Geditt-Schein, III. 1394
Gefälle des Wassers, II. 809
Gefässe, III. 1190
Gekuppelte Seulen, 391. 392
Gelender-Fenster, 449
Galliläisches Jahr, III. 1488
Gemach, 458
Gemach-Thür, 450
Gemässigte Striche Landes, III. 1443
Gemeine Bewegung, III. 1141
Gemeines Jahr, III. 1482
Gemini, III. 1143
Gemma, III. 1190
Geographie, III 1431
Geometrie. Erklärung, 117. ihr Nutzen, 116
Geometrische Cörper, wie sie zumachen seyn, 225
- - Linien, IV. 1677
- - Oerter, IV. 1755
- - Progreßion Erklärung, 74. Eigenschaften, IV. 1613. wie sie zu-

zusummiren, 1613. 1614
Geometrische proportional-Zahlen, wie sie zu finden seyn, 96. 97. 98. 90
= = Verhältniß. Erklärung, 72. Eigenschaften, 75. IV. 1636
Gerade Ascension. Erklärung, III. 1159. wie sie zu observiren sey, 1159. 1180. 1197. auf der Himmels-Kugel zufinden, 1160. wie ihr Unterscheid zufinden sey, 1179
Geradeläufig, III. 1285
Geradelinichte Figur, wie sie in Grund zulegen, 210. auszurechnen, 179. 180. zutheilen sey, 192
Geradelinichter *Transporteur*, wie er zuverfertigen, 298. 299 und zugebrauchen sey, 299. 300
Gerade Linie. Erklärung, 119. wie sie beschrieben und gemessen wird, 120. 134. 135. ihre Eigenschaften, 129. 131. und und Theilung, 160. 168. 199
Gerade Zahlen, ihre Eigenschaften, IV. 1608. 1609. 1610
Gesechst-Schein, III. 1394
Gesellschafts-Rechnung, 104. 105
Geschlecht der algebraischen Linien, IV. 1679
Geschliffene Gläser, ihre Eigenschaften, III. 1017. & sqq. IV. 1929
Geschütz-Kunst, II. 517
Geschwindigkeit, IV. 1914
Gesichts-Linien, II. 614
Gesimse, 354
Gesimse, zu Fenstern und Thüren, 443
Gestelle zu Fern-Gläsern, III. 1042
Gestirne, 1190. 1191. 1192
Gesundes Auge, wie es beschaffen sey, III. 958
Getrieb, II. 751
Geviert-Schein, III. 1394
Gewicht, wie damit Maschinen zubewegen, II. 830. 831. und Kräfte zuverstärcken seyn, 832. Unterscheid in den berühmten Städten, 541
Gewölbe. Erklärung, 471. wie es aufzurichten sey, 373. Wiederlage, 473. 474
Giebel-Feld, 411
Giebel-Zinne, 513
Gieß-Faß, II. 928. 929
Ginbat, III. 1486
Glacis, II. 637
Gläserne Feuchtigkeit, II. 954

Glas-

Glas, wie man es schleift, III. 1062. 1064. welches zum schleifen gut ist, 1058. 1060
Glas mit Wasser macht helle, III 1056
Gleichheit der Winckel, 129
Gleichschencklichter Triangel. Erklärung, 124. Eigenschaften, 155. 156. Beschreibung, 139. seq.
Gleichseitige Hyperbel. Erklärung, IV. 1709. Nutzen, 1893
Gleichseitiger Triangel. Erklärung, 123. Beschreibung, 140. Eigenschaft, 156
Gleichung, IV. 1571
Glieder in der Bau-Kunst. Erklärung, 343. Regeln ihrer Zusammenfügung, 347. Proportion, 358
Glüende Kugel, wie sie in ein Stück zuladen sey, II. 558. ihr Gebrauch, 558
Gnomonick, III. 1523
Grab Christi, III. 1191
Graben, seine Nothwendigkeit, II. 607. Beschaffenheit, 529. 530. Breite, 628 wie sie zufinden sey, 710
Grad, 122
Grenzen, III. 1367
Granaten, II. 575
Gregorianischer Calender, III. 1515
Gregorianisches Jahr, III. 1483
Gregorianische Monate, III. 1484
Grösse. Erklärung, IV. 1550. 1551. Veränderungen, 1552. Zeichen, 1553. wie sie gesehen wird, III. 956. 977. 978
Grösse der Bewegung, IV. 1914
Gröstes, IV. 1828. 1829
Gröste Circul einer Kugel. Erklärung, III. 1083. Eigenschaften, 1084. 1085. 1086. 1097. 1098. 1107. 1119
Gröste Conjunction, III. 1395
Große Conjunction, III. 1395
Großer *Radius*, II. 617
Gründe der Rechen-Kunst, welche willkühr-lich seyn, 46. 77
Grund des Gebäudes. Erklärung, 418. Stärcke, 418. Bau, 418
Grund-Bau des Gebäudes, 419
- - des Walles, II. 715. 716. in dem Wasser, 429. 430
Grund-Graben, 425
Grundlegung der Figuren, 210

Grund-Linie der Perspectiv, III. 1066
Grund-Maure, 424. 425 426. 427
Grund-Regeln der Fortification, II. 598
Grund-Riß eines Gebäudes. Erklärung, 507. 508. wie er zumachen sey, 508
= = einer Festung, III. 651
Grund-Sätze, 16
Güldene Zahl. Erklärung, III. 1499. wie sie zufinden sey, 1500, 1502
Gyps-Decke, 469

H.

Haar der *Berenices*, III. 1190
Haase, III. 1190
Halb-*Caponieres*, II. 639
Halbe Carthaune, II. 533. 553. 562
Halbe Feld-Schlange, II. 533. 553. 562
Halbe Redoute, II. 706
Halber Mond. Erklärung, II. 633. Nutzen, 633. Zeichnung, 653. 679
Halb-Messer, 121
Halb-Schatten, III. 1408
Halbes Falconet, II. 533. 553. 562
Hamle, III. 1486
Hand-Faß mit einem Spring-Brunnen, II. 925
Hand-Granaten, II. 575
Hand-Mühlen, II. 828. 829
Hangende Mörser, II. 565
Harmonische Proportion, IV. 1644
Harte Haut, III. 954
Haubitz, II. 581
Haupt-Gegenden der Welt, III. 1133. 1454
Haupt-Gesimse. Erklärung, 340. Höhe, 359. 364
Haupt-Linie, II. 617
Haupt-Riegel, II. 550
Haus-Thüre, 450. 451
Haziram, III. 1489
Hebel. Erklärung, II. 748. Eigenschaft, 761. Nutzen, 749
Heber, II. 930. 931. 933
Heilige drey Könige, III. 1510
Heimliches Gemach, 480. 481
Heliocentrischer Ort, III. 1343
Herbst, III. 1444. 1445
Herbst-Monat, III. 1484
Hercules, III. 1191
Herd, 491. 492
Herons-Brunnen, II. 939
Hertz des Löwen, III. 1191
= = Scorpions, III. 1191
Hesperus, III. 1267
Heu-Monat, III. 1484
Hexaëdrum, 252
Himmels-Kugel, III. 1128

Hexa-

Hexagonal=Zahl, IV. 1623
Hitzige Striche Landes, III. 1443
Höhen, wie sie zumessen seyn, 208. 292. III. 967. 979. wie weit man davon sehen kan, III. 1439
Höhe des Gemachs, wie sie zufinden seyn, 460
= = des neuntzigsten, wie sie zufinden sey, III. 1220. 1218
= = der Sonne, wie sie zufinden sey, III 1171. 1175
= = des springenden Wassers, II. 924
= = des Sternes. Erklärung, III. 1146. wie sie zumessen sey, 1147
= = des Triangels, wie sie zufinden sey, IV. 1659. 1661
Hohe Ordnung, 361
Hohles Glas. Erklärung, III. 1017. Eigenschaften, 1027. 1030. IV. 1933
Hohl=Kehle. Erklärung, 343. Zeichnung, 345. Grösse, 359
Hohl=Leisten, 344
Hohl=Spiegel. Erklärung, III. 989. wie er zumachen sey, 1001. Eigenschaft, 1005. IV. 1933
Holländische Fortification. Maximen, II. 641. Ausrechnung der Winckel und Linien, 642. 643. Grundriß, 651. Profil, 656. was davon zuhalten sey, 657
Holländisches Fern=Glas, III. 1033
Holtz. Eigenschaften, 315. warum es in Gebäuden, so viel möglich, zuvermeiden sey, 316
Horizont, III. 1131
Horizontal=Linie, II. 754 III. 1066
Horizontal=Uhr. Erklärung, III. 1527. Zeichnung, 1530
Horn=Haut, III. 954
Hornung, III. 1484
Horn=Werck. Erklärung, II. 635. Zeichnung, 655
Humor aqueus, III. 955
- - *crystallinus*, III. 954. Eigenschaften, 955. 957
- *vitreus*, 954
Hund, der grosse und kleine, III. 1190
Hyades, III. 1191
Hydar, III. 1486
Hydra, III. 1190
Hydraulick, II. 911
Hydrostatick, II. 843
Hydrus, III. 1190
Hyperbel. Erklärung, IV. 1698. 1699. Beschreibung, 1700. Asymptoten, 1704. Eigenschaften zwischen den Asymptoten, 1705.

1705. 1706. Quadratur, 1852. Subtangens, 1813. 1814. wie sie aus dem Kegel geschnitten wird, 1712
Hyperbeln von höhern Geschlechten, IV. 1709. 1713
Hyperbolischer After-Kegel, IV. 1882
Hypothesis, 22

J.

Jacatit, III. 1486
Jährliche Epacten, III. 1501
Jagd-Hunde, III. 1192
Jahre der Gnaden, III. 1507
Jahres-Anfang, III. 1485
Jahr-Termin. Erklärung, III. 1493. verschiedene Arten, 1506. 1507
Jahr-Zahlen, wie sie mit einander zuvergleichen seyn, III. 1508
Jahr-Zahl der Märtyrer, III. 1506
Januarius, III. 1484
Icosaëdrum. Erklärung, 252, Netze, 254
Idus, III. 1484. 1485
Jenner, III. 1484
Jiar, III. 1491
Immerwehrender Calender, III 1515
Inclination. Erklärung, III. 1338. wie die gröste zuobserviren sey, 2341. wie die übrigen auszurechnen seyn, 1341
Inclination der monatlichen Grenze, III. 1367. 1368
Inclinations-Winckel, III. 953
Inclinirte Uhren, III. 1528
Indianer, III. 1190
Indianische Biene, III. 1190
Innere Polygon, II. 617
Instrument, die Mittags-Linie zufinden, III 1136. die Soole abzuwägen, 867
Insuln in dem Monde, III. 1256
Integral-Rechnung. Erklärung, IV. 1840. Regeln, 1841
Integriren, IV. 1840
Intercolumnium, 393
Intervallum, III. 1313
Inversio rationum, IV. 1633
Inwohner der Planeten, III. 1279
Jomada, III. 1491
Jonische Ordnung, Erklärung, 357. Glieder, 372. 373
Irrational-Grösse, IV. 1565
Irrational-Zahlen. Erklärung, IV. 1566. ihre Rechnung, 1566. 1567.

wie sie aus der Gleichung abzuschaffen seyn, 1729
Irreguläre Cörper, 128
Irreguläre Figur. Erklärung, 128. Eigenschaft, 165. Beschreibung, 168. Ausrechnung, 180
= = Festung, II. 687
= = Platz, wie er zur Regularität zubringen sey, II. 688. 689. wie er zufortificiren sey, 689
Italiänische Stunden, III. 1472
Juden-Jahr, III. 1491
Jüdische Stunden, III. 1472
Jüdisches Sonnen-Jahr, III. 1492
Julianischer *Periodus*, III. 1504. sein Nutzen, 1504. 1505
Julianisches Jahr, III. 1482
Julianische Monate, III. 1484
Julius, III 1484
Jungfrau, III. 1142. 1190
Junius, III. 1484
Jupiter, III. 1141. seine Flecken, 1272. Streifen, 1268. Bewegung um die Axe, 1269. und um die Sonne, 1283. Aehnlichkeit mit dem Monde, 1277
Jupiters-Monden, III. 1270. ihre Bewegung, 1271. Weite von dem Jupiter, 1271. Finsternisse, 1271. 1272. Flecken, 1272
Jupiters-Trabanten, III. 1270

K.

Kälber-Zähne, 354. wie sie zuzeichnen seyn, 387. wo sie nicht zugebrauchen seyn, 410
Kämpfer. Erklärung, 402. Glieder, 402
Kalck, von was vor Steinen er zubrennen sey, 330. 331. Proben, 332. Verwahrung, 332. 333
Kalte Striche Landes, III. 1443. 1444
Kammen, wie sie einzutheilen seyn, II. 787. ihre beste Figur, 788
Kammer, wie sie beschaffen seyn soll, 461. 462. 465. 466
Kammer in dem Mörser, II. 564. in der Mine, II. 586
Kamm-Rad. Erklärung, II. 751. wie es zumachen sey, 785
Kammer Stücke, II. 582
Kap-Fenster, 501
Karnieß. Erklärung, 342. wesentliche Glieder, 351. andere Glieder, 352. 353. Höhe, 360. Auslaufung, 361
Kartetschen, II. 559
Kegel. Erklärung, 127. Eigenschaften, 233. 234.

Ausrechnung, 236. 244
Kegel-Schnitte, IV. 1681
Kehle, II. 617
Kehl-Leisten, 344
Kehl-Linie. Erklärung, I. 617. ihre Grösse, 626
Keil, sein Vermögen, II. 800. Nutzen in der Artillerie, 561
Kern-Schuß, II. 563
Kessel, II. 564
Kirch Thüre, 451
Klappen zu Plumpen, II. 920
Klarer Begriff, 7
Kleine Axe in der Ellipsis, II. 1693
- - Defens-Linie, II. 616
Kleiner *Radius*, II 617
Kleiner Winckel, II. 618
ein Kleinstes, IV. 1828
Kloben. Erklärung, II. 751. ihr Vermögen, 798. 799
Knall-Pulver, II. 528
Knauf, 341
Knoten. Erklärung, III. 1337. wie sie zuobserviren seyn, 1339. ihre Bewegung, 1340. 1353
Kohlen zu Pulver, wie sie zubrennen seyn, II. 521. 522. ihre Eigenschaften, 524
Kraft, II 746
Kraft, etwas unter dem Wasser zuerhalten, II. 869
Krag-Steine. Erklärung, 354. Gebrauch, 335. Zeichnung, 336. wo sie nicht zubrauchen seyn, 410
Kranich, III. 1190
Krantz, 342
Krantz-Leisten, 344
Kron-Werck. Erklärung, II. 635. Zeichnung, 635
Krebs, III. 1142. 1190
Kriegs-Baukunst, II. 597
Kripplein Christi, III, 1191
Krone, III 1190
Kropf-Felgen, II. 785
Krumme Linie, 119
Küssen-Riegel, II. 550
Kütt, wie er zumachen sey, 466. II. 571. welcher zu dem Glas-Schleifen dienlich sey, III. 1063
Kugel. Erklärung, 126. Eigenschaften, 126. 238. 240. 241. 242. IV. 1674. Ausrechnung, I. 242. 243. IV. 1879. Erleuchtung, III. 963. wie das Licht darinnen gebrochen wird, III. 1019. wie einer pfündigen Diameter gefunden wird, II. 538. wie ihre Gewichte zuvergleichen seyn, 806. wie sie zuprobiren seyn, 556
Kugel-Circul, III. 1085
Kugel-Lehre, II. 556
Kugel-Säcke, wie sie zumachen seyn, 577. 578

L.

Ladeschaufel, II. 552. 554
Ladung in den Mörser, II. 572. in die Stücken, II. 552
Länge eines Orts, III. 1441
Länge eines Planeten, wie sie zu observiren, III. 1283. zu rechnen sey, 1343
= = eines Sternes. Erklärung, III. 1194. wie sie zu finden sey, 1184. wie sie zunimt, 1195. auf jede Zeit auszurechnen, 1196
= = des Tages, wie sie zu finden sey, III. 1166
Länglichte Raute, 124
Länglichtes Viereck, ibid.
Längster Tag, wie seine Grösse zu finden sey, III. 1451
Laffeten. Erklärung, 542. Zeichnung, 548
Laffetten der Mörser, wie sie zu zeichnen seyn, II. 567. 568
Lager in dem Mörser, II. 564
Landcharten zumachen, III. 1461
Last, II. 746
Lauf in dem Geschütz, II. 545 in dem Mörser, II. 564
Lebendige Kraft, II. 746
Lebendiger Schwefel, II. 520
Lederne Stücke, II. 535
Leer=Bogen, 473
Lehrsatz. Erklärung, 21. 22. was dabey zu bedencken sey, 22. seine Theile, 22. 23. 24
Lens concava, III. 1017
- - *convexa*, III. 1016
Leo, III. 1143
Leucht=Kugeln. Erklärung, II. 577. wie sie zu machen seyn, II. 580
Leyer, III. 1190
Libra, III. 1143
Licht. Erklärung, III. 949. Eigenschaften, III. 949. 950. 951. 952. 953. 961. 962. 963. warum es von weiten so groß aussiehet, 980. wie es geschwächt, 1028. verstärckt, 1008. und gebrochen wird, 1014
Licht des Mondes, wie es ab= und zunimt, III. 1245. 1246
= = des *Mercurii*, wie es ab= und zunimt, 1266
= = der *Veneris*, wie es ab= und zunimt, 1265
Ligne de defense fichante, II. 616
- - *flanquante*, II. 616
Linea absidum, III. 1312
- - *directionis*, II. 753
Linie in dem Maasse, 119
= = in der Geometrie, 117
= = Geographie, III. 1431
Linien an der Festung, wie sie einander flanquiren, II. 619

Locus planus, IV. 1756
- - *solidus*, IV. 1756
Löwe, III. 1142. 1190
= = der kleine, III. 1192
Logarithmische Grössen, wie sie zu differentiiren, IV. 1890. zu integriren seyn, 1801
Logarithmische Linie. Erklärung, IV 1716. Eigenschaften, 1889. Quadratur, 1858. Subtangens, 1776. Nutzen, 1890. Cörper, welcher daraus erzeuget wird, 1883
Logarithmus. Erklärung 269 Erfinder, 268. Eigenschaften, 269 270. 271. Ausrechnung, 272. & sqq. IV. 1891. wie daraus die Zahl zufinden sey, 1891. wie großer Zahlen Logarithmi zufinden seyn, 278. differential-Grösse davon, IV. 1890
Luchs, III 1192
Lucifer, III. 1267
Luft. Erklärung, II. 878. Eigenschaften, 882. 895. schwächet das Licht, III. 963. wie man sie zusammendruckt, II. 894. 895
Luft um den Mond, III. 1257. 1258
Luft-Pumpe, II. 879

M.

Maaß der Linien, 119
Maaß des Winckels, 122. 157
Maaß des sphärischen Winckels, 1084
Maaß-Stab, die Ordnungen zuzeichnen, 281
Macedonisches Jahr, III. 1490
Maschine. Erklärung, II. 747. wie sie auf allerhand Art zubewegen sey, 824
Magabit, III. 1486
Mahler-Kunst, ihr Grund, III. 977
Mæjazia, III. 1486
Majus, III. 1484
Marchesvan, III. 1491
Mars, III. 1141. wie er durch Fern = Gläser observirt wird, 1268. seine Streifen, 1268. Bewegung um die Axe, 1269. Aehnlichkeit mit dem Monde, 1277. eigene Bewegung, 1284
Martius, III. 1484
Mascaam, III. 1486
Materie, IV. 1914
Mathematick, ihr Nutzen, 30. 31
Mathematische Lehr-Art. Erklärung 5. wie weit sie sich erstreckt, 30. ihr Nutzen, 30
Maure. Erklärung, 418. Beschaffenheit, 431. 432. Bau und verschiedene Arten, 433. 434. 455. 456
Maximen zuerfinden, wo sie anzutreffen seyn, 37. 38
May, III. 1484

Mechanick, II. 745
Mechanisch philosophiren, II. 748
Mecheir, III. 1485
Media & extrema ratione secare, IV. 1655. 1656
Meere in dem Monde, III. 1255
Meer-Sand, wie er in dem Bauen zugebrauchen sey, 329
Meber mah, III. 1487
Mehr, IV. 1554
Menschen in dem Monde, III. 1260
- - in den Planeten, III. 1279
Mensis anomalisticus, III. 1354
Draconticus, III. 1353
Mercurius, III. 1141. wie er durch Fern-Gläser observirt wird, 1263. 1264. Bewegung um die Sonne, 1266. 1285. Parallaxis, 1281. Aehnlichkeit mit dem Monde, 1277. 1278
Mercurius in Sole, III. 1264
Meridianus. Erklärung, III. 1130. 1145. 1434. wie der Unterscheid der Meridianorum zufinden sey, 1249
Merg, III. 1484
Mesori, III. 1485
Messen, II. 877
Meß-Kette, 136
Meß-Schnur, 136
Meß-Tischlein, sein Gebrauch, 201
Metall, woraus es gemacht wird, II. 534. Verhältniß der Schwehre, II 862
Methodus de maximis & minimis, IV 1828
- - *tangentium inversa*, IV. 1885
Mezaninen, 438
Milch-Strasse, III. 1192. 1193
Micrometrum, III. 1260. 1261. 1262
Minen. Erklärung, II. 585. Beschaffenheit, 586. 587. wie sie anzulegen seyn, 590
Minute, 117. III. 1471
Mira, III. 1388
Mittag, III. 1133. 1138
Mittags-Circul, III 1434
Mittags-Höhe. Erklärung, III. 1146. wie sie zumessen 1148. und auszurechnen sey, 1158. Nutzen, 1157
Mittags-Linie. Erklärung, III. 1132. wie sie zufinden seyn, 1134
Mittags-Uhren. Erklä. III. 1527. Zeichnung, 1533
Mittel-Punct des Circuls, Erklärung, 121. wie er zufinden sey, 165. 224
- - der Hyperbel, IV. 1699
- - der Grösse, II. 576. 762
- - der Schwehre. Erklärung, II 754. wie er zufinden sey, 756
Mitternacht, III. 1135

Mitternachts-Uhr. Erklärung, III. 1527. Zeichnung, 1533
Mittlere Anomalie. Erklärung III 1313. ihr Maaß, 1313. wie sie zufinden sey, 1320
- - Bewegung, III. 1313
- - Theil eines sphärischen Triangels, III. 1087
Mittlere Zeit, III. 1417
Modul. Erklärung, 359. Eintheilung 359. wie er zufinden sey, 363. für die oberen Seulen zuverjüngen, 415. 416
Mörser. Erklärung, II. 564. Materie, 564 Theile, 564. Zeichnung, 566. Richtung, 572. Ladung, 572. wie weit er trägt, 574
Mörser zu Granaten, II. 575
Mörtel, wie er zubereitet wird, 430
Mohren-Jahr, III. 1486
Monatliche Aequation, III. 1361
- - Breite, III. 1369
- - Eccentricität, III. 1357
- - Epacten, III. 1500
Monatliches Argument der Breite, III. 1367
- - der Länge, III. 1358. 1359
Monatliche Scrupel der Länge, III 1358. 1359
Mond, wie er durch Ferngläser erscheint, III. 1252. Natur und Beschaffenheit, 1254. 1255. Aehnlichkeit mit der Erde, III. 1259. Bewegung um die Erde, 1349. 1286. Bewegung seiner Knoten, 1353. wie seine Berge zumessen seyn, 1383. Charte darüber, 1384. seine Grösse, 1378. und Weite von der Erde, 1370
Mond-Charten, III. 1384
Mond-Circul, III. 1499. Grösse, 1498
Monden-Jahr, III. 1481
Monden-Monat, III 1480
Mond-Epacten, III. 1500
Mond-Finsterniß. Erklärung, III. 1248. Ursachen, 1247. 1248. Umstände, 1247. 1248. 1249. 1396. Ausrechnung 1397. wie sie zuobserviren sey, 1407
Mordad mah, III. 1487
Morgen, III. 1133. wie diese Gegend zufinden sey, 1138
Morgen-Röthe, wie lange sie währet, 1216
Morgen-Stern, III. 1267
Morgen-Uhren, III. 1527. Zeichnung, 1535
Motus latitudinis, III. 1354
- - *librationis*, III. 1269
- - *reflexionis*, III. 1301
Muhammedisches Jahr, III. 1490
Muharam, III. 1491

Mulden-Gewölbe, 472
Multiplication. Erklärung, 42. Regeln für ganze Zahlen, 59. für Brüche, 80. für Buchstaben, IV. 1560. für irrational-Zahlen, IV. 1570. Zeichen, 1554
Mund-Stücke, II. 542. 543
Muschel-Linie, IV. 1713
Musteraka, IV. 1488

N.

Nabe, II. 551
Nabonassferisches Jahr, III. 1485. wie sein Anfang zufinden sey, III. 1486
Nacht, III. 1469
Nachts-Länge, wie sie zufinden sey, III. 1169
Nadir, III. 1130
Nabase, III. 1486
Nahe-säulig, 395
Nahme der Verhältniß, 73
Nahmen der Zahlen, 47
Naturlicher Tag, III. 1469
Nebelichte Sterne, III. 1193
Neben-Gegenden, III. 1454
Neben-Pfeiler, 402
Neben-Striche, II. 616
Neben-Winckel, 133. III. 1086
Neigungs-Winckel, III. 953
Nenner eines Bruchs, 77
Netzförmiges Häutlein, III. 954
Neu-Mond, III. 1246
Niedrige Ordnungen, 362
Nisan, III. 1491. 1492
Nodi. Erklärung, III. 1337. Bewegung, 1340. Ort, 1339. wie sie zuobserviren seyn, 1339
Nodus ascendens, III. 1338
- - *australis*, ibid.
- - *borealis*, ibid.
- - *descendens*, ibid.
Nonæ, III. 1484. 1485
Norden, III. 1454
Nordische Krone, III. 1190
Nord-Pol, III. 1128. 1433
Normal-Linie, IV. 1809
November, III. 1484
Numerus polygonus, IV. 1623

O.

Ober-Saum, 344
Oberschlächtiges Wasser-Rad. Erklärung, 800. wie es zutheilen sey, 816. wie das Wasser darauf zuleiten sey, 813. wo es zugebrauchen sey, 812
Objectiv-Glas, III. 1033
Obliquitas ecliptica, III. 1155
Oblongum, 124
Occasus acronyctus, III. 1207
- - *cosmicus*, III. 1207
- - *heliacus*, III. 1209
Ochsen-Auge, III. 955
Octaëdrum, 252
Octante, III. 1117

October, III. 1484
Oefen, wie sie zuverbessern seyn, 488. wie mit einem zwey Zimmer zuheitzen seyn, 489
Ohren=Gewölbe, 472
Olympias, III. 1508
Ophiuchus, III 1190
Optick. Erklärung, III 949. Nutzen, III. 946
Opus rusticum, 456
Opposition, III 1394
Ordentliche Figur, 125
Ordentlicher Cörper, 128
Ordinate, IV. 1678. ihre Verhältniß in der Parabel, 1686. und Ellipsi, 1694
Ordnung. Erklärung, 338. Ursprung, 337. 355. Theile, 350. 351. Zahl, 356. wie von ihnen zuurtheilen sey, 338. 339. wie sie zuerfinden, 354. und zuzeichnen sey, 384. 385
Orillon, II. 622
Orion, III 1190
Ort an dem Circul. Erklärung, IV. 1756. wie er zuconstruiren sey, 1765
= = an der *Ellipsi*. Erklärung, IV. 1756. wie er zuconstruiren sey, 1762
= = an einer geraden Linie. Erklärung, IV. 1756. wie er zuconstruiren sey, 1756
Ort an der Hyperbel. Erklärung, IV. 1756. wie er zuconstruiren sey, 1765
Ort zwischen den Asymptoten, IV. 1767
= = an einer Parabel. Erklärung, IV. 1756. wie er zuconstrutren sey, 1757
= = der Sonne, wie er zuobserviren sey, III. 1158
= = des Bildes in dem Spiegel, III. 1005. 1011. IV. 1922
Ort, wo jede Sache gesehen wird, III. 993
Ortus acronyctus, III. 1207
- - *cosmicus*, ibid.
- - *heliacus*, III. 1209
Ost, III. 1454
Oster=Fest, wenn es zufeyren sey, III 1510. wie es auszurechnen sey, III. 1511
Ouvrage a Cornes, II. 635
- - *couronné*, II. 635

P.

Pochon, III. 1485
Pagans Fortification. Maximen, II 658. Rechnung der Winckel und Linien, 659, Zeichnung, 660
Pagomen, III. 1486
Palilitium, III. 1191
Pallisaden, II. 638
Panster=Zeug, II. 817
Paophi, III. 1485
Parabola. Erklärung, IV. 1681. 1682. Eigenschaft, Beschreibung, 1683. 1689 1757.

1757. 1886. 1912. Quadratur, 1844. Rectification, 1865. Subtangens, 1810. wie sie aus dem Kegel geschnitten wird, .1710
Parabeln von höherem Geschlechte. Erklärung, IV. 1679. Beschreibung, 1684. 1685. Eigenschaften, 1689. Subtangens, 1808. Quadratur, 1845. Rectification, 1868
Parabolischer After-Kegel, IV. 1862. 1880
Parallaxis Erklärung, 1224. Eigenschaften, 1224. 1225. 1226
Parallaxis der Erd-Bahn. Erklärung, III. 1344. wie sie zufinden sey, 1345
= = der Fix-Sterne, III. 1302. 1303
- - *Martis*, III. 1373
- - *Mercurii*, III. 1235
= = der Sonne, III. 1373
Parallel-Circul, III. 1373
Parallelepipedum. Erklärung, 127. Eigenschaften, 127. 227. 229. 244. IV. 1836. 1837. Ausrechnung, 229. 230. Netze, 254
Parallel-Linien. Erklärung, 125. Beschreibung, 147. Absteckung auf dem Felde, 153. Eigenschaften, 151. 152. 155
Parallel-Lineal, Structur und Gebrauch, 147. 148
Parallelogramma. Erklärung, 126. Eigenschaften, 176. 189. 190. Theilung, 190. 222
Parameter, IV 1682. 1690. 1698
Partial-Finsterniß. Erklärung, III. 1482. wie ihre Grösse zufinden sey 1402
Particula exsors, III. 1360. 1361
Paternoster-Werck. II. 913
Pauni, III. 1485
Pegasus, III 1190
Pentagonal-Zahl, IV 1623
Perigæum, III. 1312
Perihelium, ibid.
Periodischer Monat, III. 1350
Periodus Juliana, III. 1504
Perpendicul an Uhr-Wercken, II. 837. 838
Perpendicular-Linie. Erklärung, 123. Beschreibung, 148. 149. 159
Perser-Jahr, III 1487
Perseus, III. 1190
Perspectiv, III. 1065
Perspectivische Risse, 510
Petarde, II. 582. 583
Petrus, III. 1191
Pfähle, wie sie zum Grund-Baue beschaffen seyn sollen, 422. 423. was bey dem Einrammen in acht zu-

zunehmen sey, 423
Pfau, III. 1190
Pfeil, ibid.
Pfeiler, 334. wie sie in das Perspectiv zubringen seyn, III. 1070
Pflaster, was für Figuren der Steine sich dazu schicken, 462
Pflaster-Ziegel, 462
Pfuhl, 344
Phamenoth, III. 1485
Pharmuthi, ibid.
Phœnix, III. 1190
Phosphorus, III. 1267
Pilaster, 334
Pisces, III. 1143
Places d' armes, II. 681
Plagæ, III. 1454
Planet. Erklärung, III. 1143. Bewegung durch den Thier-Kreiß, 1285. 1286. 1328. wie die Eccentricität nebst dem Aphelio gefunden wird, 1332. wie ihre Grösse zufinden sey, 1379. Innwohner, 1279. ihre Natur, 1277. 1278. Verdeckungen unter einander, 1280. scheinbare Diameter, 1280. 1282. Weite von der Sonne, 1321. und von der Erde, 1376. 1345. 1281. warum sie stille stehen und zurück gehen, 1298. 1299
Planeten-Stunden, III. 1472
Platten. Erklärung, 343. Grösse, 359
Platter Spiegel. Erklärung, III. 989. wie er zumachen sey, 990. 991. Eigenschaften, IV. 1923
Plättlein. Erklärung, 343. Grösse, 359
Plejades, III. 1191
Plumpe, II. 917. 918. 919
Plump-Stock, II. 918
Polar-Circul, III. 1145
Polar-Uhren. Erklärung, III. 1527. Zeichnung, 1536
Pol der Kugel, III. 1085
Pole der Eclipticꝛ, III. 1155
Pol-Höhe, wie sie zufinden sey, III. 1149. 1154. 1158
Pollux, III. 1191
Polus antarcticus, III. 1128
- - *arcticus*, ibid.
Polygonal-Zahl. Erklärung, IV. 1623. wie sie zufinden sey, 1625
Polygone, 125
Polygon-Winckel, 165
Polyhedrische Gläser, III. 1058
Polynomische Wurzel, IV. 1586
Polyoptrische Gläser, III. 1058
Postement. Erklärung, 339 Beschaffenheit, 353. 405. Höhe, 360. Eintheilung, 363. Gebrauch, 340. 341

Postement-Gesimse. Erklärung, 341. wesentliche Glieder, 351. andere Glieder, 351. 352. Höhe, 360. Auslaufung, 361
Postulata, 17
Potagen-Herd, wie er zu bauen sey, 492
Potenz. Erklärung, IV. 1562. Grade, 1563. Zeichen, 1563. Rechnung, 1563. 1564
Præsepe, III. 1191
Prisma. Erklärung, 126. Eigenschaft, 126. 227. 228. 244. Ausrechnung, 230. Netze, 255
Profil, II 656. Zeichnung, 656. 657. wie sein superficial Jnhalt zufinden sey, 707. wie der cörperliche zufinden sey, 711
Progressio arithmetica, 74. Eigenschaften, IV. 1613
- - *geometrica*, 74. IV. 1613
Proportio continua. Erklärung, 74. Eigenschaften, 94. 95. IV. 1631
Proportion. Erklärung, 73. Zeichen, 72. Eigenschaften, 94. 95. 96. 97. III. 1010. 1111. IV. 1630. 1633
Proportional-Linien, wie sie zufinden seyn, 197. IV. 1774
Proportional-Zahlen, 96. 98
Prosthaphæresis, III. 1315
Pult-Dach, 500
Pulver, wie es gemacht wird, II. 525. 526. Ursachen der Würckung, 526. Sätze, 526. womit es anzufeuchten sey, 525 527. wie es reissend wird, 527. wie man es probirt, 529. 530. 531. wozu es Anlaß gegeben hat, 518
Pulver-Mühlen, II. 527
Pulver-Sätze, II. 526.
Punct. Erklärung, 117. warum er untheilbar sey, 117. 118. 121
Puncta flexus contrarii, IV. 1901
Pupilla, III 954. 960
Püschel-Kunst, 913
Pycnostylon, 395
Pyramide. Erklärung, 28. Eigenschaft, 128. 232. 233. 234. 244. Ausrechnung, 236. Netze, 255
Pyrobologia, II. 517
Pyrotechnia, ibid.

Q.

Quadrat. Erklärung, 124. Beschreibung, 170. 189. Eigenschaften, 172. Ausmessung, 174. 175. wie es in das Perspectiv zubringen sey, III. 1067. 1068
Quadratische Gleichung. Erklärung, IV. 1588. wie sie

sie aufzulösen sey, 1588. Exempel, 1590. 1591
Quadrat-Linie, 174
Quadrat-Maaß, 174. 175
Quadratrix, IV. 1716
Quadrat-Ruthe, 174
Quadrat-Schuhe, ibid.
Quadratur des Circuls, IV. 1853
" " der krummen Linien, IV. 1844
Quadratus, III. 1394
Quadrat-Wurzel. Erklärung, 82. wie sie gefunden wird, 85. IV. 1587. ihr Logarithmus, 270
Quadrat-Zahl. Erklärung, 83. IV. 1623. wie sie entstehet, 84. 85. IV. 1586. 1587. 1588. Eigenschaften, 1745. ihr Logarithmus, 270. ihre Differentien, IV. 1605
Quadrat-Zoll, 175
Quartier-Feld-Schlange, II. 533. 553. 562

R.

Rabe, III. 1190
Rabia, III. 1401
Rad an einer Axe, II. 749
Rad-Linie, IV. 1717
Radius des Circuls, 121. 129. 262
" " der Evolute, IV. 1909
Räder der Laffeten, wie sie zuzeichnen seyn, 551
" " in der Mechanick, wie sie zuberechnen seyn, II. 781
Räder-Werck ohne Kammen, II. 790
Rajob, III. 1491
Ramadan, ibid.
Rarseulig, 395
Rasen, II. 717
Ravelin. Erklärung, II. 632. Nutzen, 632. Zeichnung, 653. 662. 679
Raute, 124
Rechen-Kunst. Erklärung, 37. wie sie abzuhandeln sey, 37
Rechnnngs-Arten, ihr Ursprung, 40. 41. ihre Anzahl, 41. Nahmen und Erklärungen, 41
Rechter Winckel, 123. 158
Rechtwincklichter Triangel. Erklärung, 123. Eigenschaften, 150. 187. IV. 1661. 1663. 1669. 1785. 1795. wie sein Inhalt zu finden sey, IV. 1656
Rectangulum. Erklärung, 124. Beschreibung, 171. Eigenschaft, 172. Ausrechnung, 175
Rectification der krummen Linien, IV. 1865
Regel, III. 1191
Regel Detri, 99
Redoute. Erklärung, II. 702. Grund-Riß, 703. Profil, 704
Reduction zur Eclipticꝛ, III. 1339. 1342
Reflexion. Erklärung, III. 951.

951. Gesetze, 951. 952. IV. 1920
Reflexions-Winckel, III. 951
Refraction. Erklärung, III. 952. Gesetze, IV. 1927. wie ihre Grösse zu observiren sey, III. 1014. 1015
Refraction der Sonne, III. 1228. 1229. 1230
Refractions-Winckel, III. 952
Refringirter Winckel, III. 953
Regel *de quinque*, 103. 104
Regiments-Stücke, II. 533. 553. 562
Reguläre Festung, II. 687
Reguläre Figur. Erklärung, 125. Eigenschaften, 161. 162. 165. 181. Beschreibung, 168. 169. Ausrechnung, 180
Regulärer Cörper. Erklärung, 128. Anzahl, 251. Netze, 253
Reguläres Dreyeck. Wie seine Seite sich zu dem Diameter des umschriebenen Circuls verhält, IV. 1648
Reguläres Vieleck. Wie es zubeschreiben sey, 168. 169. Ob Renaldinus es richtig zubeschreiben angewiesen hat, IV. 1671
Regula composita, 103. 104
Regula societatis, 104. 105
Regulus, III. 1191
Reiß-Bret, 382
Reiß-Kohlen, II. 522
Reiß-Schiene, 383. 384
Retrogradus, III. 1285
Rhombus. Erklärung, 124. Beschreibung, 171. Eigenschaft, 175. Ausrechnung, 177
Riemlein, 344
Rinn-Leisten, 344
Ring um den Mond in der Sonnen-Finsterniß, III. 1243. 1244
Ring um den Saturnus, III. 1277
Röhre, II. 911
Röhren zu Fern-Gläsern, III. 1042
Römer Zins Zahl. Erklärung, III. 1503. wie sie zu finden sey, ibid.
Römische Ordnung, 358. 374
Römischer Calender, III. 1484
Rolle, 752
Romanische Treppe, 496
Roß-Mühlen, II. 825. 826
Rost zum Grund-Baue, 426. 427
Rückgängig, III. 1285
Ruhe-Punct, II. 752
Ruhe-Riegel, II. 550
Ruthe. Erklärung, 119. Zeichen, 122

S.

Saal. Wie er beschaffen seyn soll, 461. 475. 476. 477
Sächsische Raute, III. 1192
Seule. Erklärung, 333. 339. wie sie zuproportioniren sey, 335. 336. Höhe, 360. wie sie zuverdünnen sey, 337. 390. wie eine über die andere zustellen sey, 414. ihr Rang, 414
Seulen-Laube, 393
Seulen-Stellung, ibid.
Seulen-Stuhl, 339
Seulen-Weite. Erklärung, 339. Grösse, 394. 395. 396. was dabey in Acht zunehmen sey, 395. 396. 397
Salpeter. Wie er zuläutern sey, II. 518. woher er kommt, 519. Eigenschaften, 223. 524. 525
Sand. Wie er beschaffen seyn soll, 328. Probe, 328. 329. Arten, 329
Sappiren, II. 735. 736
Satellites Jovis, II. 1270
Saturnus, III. 1141. seine Gestalten, welche man durch das Fern-Glas observirt hat, 1275. 1276. Aehnlichkeit mit dem Monde, 1277. Bewegung um die Sonne, 1284
Saturnus-Monden, III. 1273. 1274
Satz zu dem Feuer-Kugel-Zeuge, II. 576
Schaft. Erklärung, 341. Beschaffenheit, 348. 359. 361. wesentliche Glieder, 351. Höhe, 361
Schaft-Gesimse. Erklärung, 341. wesentliche Glieder, 351. andere Glieder, 352. Höhe, 360. Auslaufung, 361
Schalt-Jahr, III. 1481. 1482. 1483
Schalt-Tag, III. 1481. 1482
Schantz-Körbe, II. 719
Scharivar mah, III. 1487
Schatten. Erklärung, III. 949. Eigenschaften, 949. 965. 966. 967. wie seine Länge zufinden sey, 966. 967. 968. wie dadurch die Höhen zumessen seyn, 967. seine Figur, 969. 970. 971. wie er perspectivisch zuzeichnen sey, 1074
Schatten der Berge in dem Monde, III. 1253. 1257
Scheere. Erklärung, II. 634. Zeichnung, II. 654
Scheibe des Klobens, II. 751
Scheinbare Grösse. Erklä-

klärung, III. 978. wie sie zufinden sey, 979
Scheinbare horizontal-Linie, II. 755
Scheinbarer Diameter der Sterne, III. 1280. 1281
Scheinbarer Horizont, III. 1132
Scheinbare Zeit, III. 1470
Scheitel, IV. 1678
Schemmel-Mörser, II. 566
Schiefe Ascension. Erklärung, III. 1161. wie sie zufinden sey, 1161. 1162
Schiefe der Ecliptick, III. 1155
Schiefe Descension, III. 1161
Schiefliegende Fläche, II. 752. 791. 792. 848
Schieß-Scharten, II. 718
Schiff Jasons, III. 1190
Schlange, II. 533. 553. 562. III. 1190
Schlangen-Mann, III. 1190
Schluß-Stein. Wie er zuzeichnen sey, 409
Schnell-Wage, II. 769. 770
Schnörckel, 375. Zeichnung, 387
Schönheit. Erklärung, 307. wie sie zuerkennen sey, 308
Schönseulig, 395
Schöpf-Rad, II. 916
Schöpf-Werck, II. 915
Schorstein, 502
Schrancken der Wurtzeln in Gleichungen, IV. 1733
Schraube. Erklärung, II. 752. ihr Vermögen, 794. ihre Eintheilung, 794. 795
Schrauben-Mutter, II. 752
Schraube ohne Ende, II. 796
Schrift. Wie sie auszulegen sey, III 1295
Schüsseln zu dem Glas-Schleifen, III. 1060. 1061
Schütze, III. 1142. 1190
Schüsse eines Stucks, wie weit sie gehen, II. 561
Schuhe. Erklärung, 119. Zeichen, 122
Schulter-Winckel, II. 618
Schwan, III. 1190
Schwantz-Riegel, II. 550
Schwartze Haut, III. 954
Schwehre. Erklärung, II. 755. ist unter dem Æquatore kleiner als gegen die Pole, III. 1301. 1302
Schwehre der Cörper in flüssiger Materie, II. 851. 865
" " der Luft, II. 883. 886
" " der Metalle und anderer Cörper, II. 862

Schwefel, wie er zuläutern, II. 520. 521. welcher zu dem Pulver am besten sey, 520. wozu er dienet, 521. Eigenschaften, 523. 524. 525
Schweif der Cometen, Was er sey, III. 1392
Schwung-Räder, II. 837. 838
Sclerotica, III. 954
Scorpion, III. 1142. 1190
Scorpius, III. 1143
Scrupel der Breite, III. 1367. 1368. 1369
= = der Währe, III. 1421. 1422
= = der Verfinsterung, III 1401. 1402. 1420
Secans. Erklärung, 262. Ausrechnung, 268. Logarithmus, 280
Sechs-Eck. Erklärung, 125. Eigenschaft, 170. Beschreibung, 170
Second flanc, II. 616
Sectio divina, IV. 1655
Sector. Eigenschaft, 182. Ausrechnung, 187
Secunde, 122. III. 1471. wie sie in trigonometrischen Rechnungen zufinden sind, I. 284
Secundirende Linie, II. 602
Seele eines Stückes, II. 542. 544. 549
Sehne, 121
= = in dem Circul, 161
= = in der Parabel, IV. 1687
Seite der polygonal-Zahl. Erklärung, IV. 1624. wie sie zufinden sey, 1627
Semidiameter, 121
Semiordinate, IV. 1678
Senckrechte Linie, 123
September, III. 1484
Serpentinel, II. 533. 553. 562
Setzer, II. 555
Setz-Kolben, ibid.
Sextilis, III. 1394
Schaaban, III. 1491
Schabat, III. 1489
Schavvall, III. 1491
Schebat, ibid.
Sicher-Pfahl, II. 823
Sichtbare Bewegung des Mondes von der Sonne, III. 1414. 1415
= = Breite des Mondes, III. 1417
= = Finsterniß, III. 1242
= = Länge des Mondes, III. 1410
Sichtbare Zusammenkunft, 1416
Sidera medicæa, III. 1270
- - *Urbanoctaviana*, III. 1274
Sieben-Gestirn, III. 1191
Siegel-Wachs, wie es zu machen sey, III. 1063

Sinus.

Sinus. Erklärung, 261. Eigenschaften, 261. 262. 280. Ausrechnung, 264. Gebrauch, 281. IV. 1875. wie besonders der von 18°, IV. 1655. der von 22° 30′, 1650. der von 60°, 1649. und eines vielfachen Bogens zufinden sey, 1664. wie ihre Logarithmi zusuchen seyn, I. 276. wie aus ihnen die Bogen zufinden seyn, IV. 1873
Sinus artificialis, III. 1100
- - *complementi*, 262. 264
- - *totus*, 262
- - *versus*, 262. IV. 1875
Sivan, III. 1491
Solstitium, wie es zuobserviren sey, III. 1305
Sommer, III. 1444
Sonne, ihre Flecken, III. 1233. Natur, 1234. Figur, 1236. Bewegung um die Axe, 1236. Bewegung durch den Thier-Kreiß, 1139. 1140. 1308. ob sie sich um die Erde bewegt, 1293. 1295. ihre Eccentricität, 1312. wie sie die Fläche bescheint, 1524. 1525. ihre Weite von der Erde, 1376. ihre Grösse, 1379. 1381
Sonnen-Circul. Erklärung, III. 1495. Grösse, 1496. wie er zufinden sey, 1497
Sonnen-Finsterniß. Erklärung, III. 1242. Umstände und Beschaffenheit, 1239. 1243. 1244. 1245. Ursach, 1241. 1242. 1257. wo sie gesehen wird, 1409. wenn sie sich ereignet, 1410. wie sie ausgerechnet, 1410. und observirt wird, 1425
Sonnen-Jahr, III. 1480. wie seine Grösse zufinden sey, 1308
Sonnen-Monat, III. 1479
Sonnen-Stunden, III. 1164
Sonnen-Uhr, III. 1523
Sonntage, auf welche Tage in dem Jahre sie fallen, III. 1498
Sonntags-Buchstab. Erklärung, III. 1479. wie er zufinden sey, 1497
Saphar, III. 1491
Sphæra obliqua, III. 1450
- - *parallela*, III. 1448
- - *recta*, III. 1447
Sphærica, III. 1125
Sphärische Spiegel, III. 990
Sphärischer Triangel, Erklärung, III. 1083. Eigenschaften, 1087. 1089. 1090

Sphärische Trigonometrie, III. 1083
Sphärischer Winckel, III. 1084
Spica virginis, III. 1191
Spiegel. Erklärung, III. 989. Eigenschaften, IV. 1921
Spiegel-Gewölbe, 472
Spiel-Raum. Erklärung, II. 535. wie er zufinden sey, 536. sein Nutzen, 536
Spindel, II. 752
Spiral-Linie. Erklärung, IV 1718. Subtangens, 1760. Quadratur, 1859
Spiral-Linien von unendlichen Geschlechten. Erklärung, IV. 1718. Subtangens, 1821. 1822. Quadratur, 1860. 1861
Spitziger Winckel, 123. 158
Spitzwincklichter Triangel, 123
Spring-Brunnen durch den Fall, II. 924. durch Heber, 930. durch die Wärme, 939. durch die Luft, 936
Spring-Brunnen, welcher unterweilen aufhört, II. 932
Stab. Erklärung, 343. Zeichnung, 344. Grösse, 359
Stäblein, 343
Staber-Zeug, II. 817
Stadt-Thor, 451
Stärcke der Linie, II. 602
Stamm, 341
Stampfer, II. 555
Stangen-Zirckel, 121
Stationarius, III. 1285
Stech-Heber, III. 929
Stehende Mörser, II. 565
Steine, wie ihre Güte zuerforschen sey, 322. wenn sie sollen gebrochen werden, 323. wie man sie öltränckt, 467. wie sie in dem Grund-Baue zulegen seyn, 427
Steinbock, III. 1142. 1190
Stein-Carthaunen, II. 582
Stein-Galle, 323
Steinhauen, wie es beschaffen sey, 472
Stein-Klippen in dem Monde, III. 1256
Stein-Stücke, II. 582
Stell-Riegel, II. 550
Stengel, 354
Stern, wie lange er über dem Horizonte bleibt, III. 1198. wenn er in den Meridianum kommt. 1199. 1202. wie er darinnen zuobserviren sey, 1151. wenn er auf- und untergeht, 1200. mit welchem Puncte der Ecliptick er aufgeht, 1203. 1204. 1206.

1206. wenn er mit der Sonne untergeht, 1207. wenn er sich unter die Sonnen-Strahlen verbirgt und wieder heraus-rückt, 1210. welche niemals auf- und welche niemals untergehen, 1212. 1213. ihre scheinbare Grösse, 1194. ihre Anzahl, 1189. 1193. Weite von der Erde und Natur, 1387. besondere Namen derselben, 1190
Stern in dem Auge, III. 954
Stern-Rad, II. 751
Stern-Schantze. Erklärung, II. 702. Grund-Riß, 705
Stiefel in dem Druck-Wercke, II. 920
Stillstand eines schwehren Cörpers, II. 755. 756. 758. 760
- - der Planeten, III. 1284
Stier, III. 1142. 1190
Stinckende Kugeln, II, 577
Stirn-Rad, II. 751. 785
Stock-Panster, II. 819
Stoß in dem Mörser, II. 564
Straub-Zeug, II. 817
Streiche, II. 615
Streichende Defens-Linie, II. 616
Streich-Winckel, II. 618
Streifen, 344
Stuben, wie sie beschaffen seyn sollen, 461. 475. 476
Stücke. Erklärung, II. 532. Arten, 532. Materie, 534. Theile, 542. 543. Beschaffenheit, 542. Ladung, 553. Richtung, 559. 560. Länge, 544. 545. Zeichnung, 546
Stück-Giessen, II. 534
Stück-Pulver, II. 526
Stütze. Erklärung, 333. Gebrauch, 335. Beschaffenheit, 336. 337
Stumpfer Winckel, 123. 159
Stumpfwincklichter Triangel, 123
Stunde. Erklärung, III. 1471. Arten, ibid. wie sie mit einander zuvergleichen seyn, 1473
Stunde der ersten Bewegung, III. 1164
Stufen auf der Treppe, wie sie seyn sollen, 594. 495
Sturtz-Rinne, 344
Subnormal-Linie. Erklärung, IV. 1809. wie sie zufinden sey, 1816
Subtangens. Erklärung, IV. 1808. wie sie zufinden seyn, 1809
Subtrahiren. Erklärung, 42. Regeln für gantze

Zahlen, 42. für gebrochne, 79. für Buchstaben, IV. 1556. 1557. für irrational-Zahlen, 1568. Zeichen, I. 57. IV. 1553
Süden, III. 1454
Süder-Pol, III. 1129. 1433
Südische Krone, III. 1190
Summe, 41
Summiren, IV. 1840
Summirende Zahlen, 41
Syllogismus, Nutzen in der Mathematick, 27
Symmetrie, 313
Syue, III. 1486
Synodischer Monat, III. 1489
Systema mundi Copernicanum, III. 1302
- - *Tychonicum*, III. 1288. 1291
Systilon, 395

T.

Tabulæ æquationum, III. 1323
- - *curtationum*, III. 1343
- - *inclinationum*, III. 1342
- - *latitudinum & longitudinum*, III. 1188. 1189
- - *motus latitudinis*, III. 1354
- - *motuum mediorum*, III. 1310
- - *sinuum & tangentium*, 263
Tag. Erklärung, III. 1469. wenn er die gantze Nacht durch schimmert, 1213. 1214. wie er ab- und zunimt, 1445. wie lange er währt, III. 1166
Tage-Circul, III. 1133
Tages-Anbruch. Erklärung, III. 1211. Ursach, 1212. wie er auszurechnen sey, 1213. 1214
Talud, II. 609
Tamuz, III. 1489. 1491
Tangens. Erklärung, 262. Ausrechnung, 267. Gebrauch, 285. 286. 287. Logarithmus, 279. Eigenschaften, 285. wie daraus der Bogen zufinden sey, IV. 1870
Tangens des vielfachen Winckels, wie er zufinden sey, IV. 1667
- - der krummen Linien. Erklärung, IV. 1808. wie er zufinden sey, 1809
Taufe der Feuer-Kugeln, II. 579
Taurus, III. 1143
Tebeth, III. 1492
Tekuphæ, III. 1493
Tenaille simple, II. 634
- - *double*, II. 634
Terreplain, II. 609
Tetraëdrum. Erklärung, 252. Netze, 253

Theilung der geraden Linie, 198
Theorema, 21
Theorema Pythagoricum, 187. 188
Theorica, III. 1125
Thermometra concordantia, II. 901
Thermometrum, II. 896
Thermoscopium, ibid.
Thesis, 22
Thier-Kreis, III. 1144
Thor an einer Festung, II. 720
Thoth, III. 1485
Thür. Erklärung, 450. Breite und Höhe, ibid. Figur, 451. wie sie in das Perspectiv zubringen sey, 1071
Thür, welche sprützt, wenn man durchgeht, II. 925
Thür-Schwellen, 452
Tiefe der Sonne, wenn der Tag anbricht, III. 1211. wie sie zufinden sey, 1217
Tisbrin, III 1489. 1491
Todte Kraft, III. 746
Tonnen-Gewölbe, 471
Torricellianische Röhre, II. 890
Toucan, III. 1190
Total-Finsterniß, III. 1402
Transcendentische Linie, IV. 1679
Transporteur, 123
Trapezium. Erklärung, 125. wie es zutheilen sey, 191
Traversen. Erklärung, II. 638. Nutzen, 638. Zeichnung, 682
Trenchéen, II. 726
Treppe. Erklärung, 493. Beschaffenheit, 493. 494. 495. Zeichnung, 496
Triangel. Erklärung, 123. Eigenschaften, 138. 150. 153. 155. 156. 177. 187. 195. 196. 198. III. 1089. IV. 1667. Beschreibung, I. 140. 141. Ausrechnung, 178. IV. 1661. Theilung, I. 223. wie er in das Perspectiv zubringen sey, III. 1066. 1067
Triangel, der südliche, III. 1190. der nordliche, 1190
Triangular-Zahl, IV. 1623
Triangulum æquatorium, III. 1315
- - *æquilaterum*, 124
- - *æquicrurum*, ibid.
- - *scalenum*, ibid.
Triglyphen, 386
Trigonometrie. Erklärung, 261. Nutzen, 259. 260
Trigonus, III. 1394
Trillings-Stöcke, II. 787
Trinomische Wurzel, IV. 1586
Trompeter-Gänglein, 449

Tropicus cancri, III. 1144
capricorni, III. 1434
Trilling, 751. 789
Tunchen, 455 456
Tuscanische Ordnung. Ecklärung, 357. Glieder, 365
Tybi, III. 1485
Tykymt, III. 1486
Tyr, III. 1486
Tysbas, III. 1486

V. U.

Variation, III. 1365. 1366
Vaubanische Fortification, Maximen, II. 673. Ausrechnung der Linien, 674. Grund-Riß, 676. Profil, 680. Werth, 689
Verstärckte Manier, Maximen, 683. Grund-Riß, 684. Werth, 686
Veadar, III. 1491
Ueberschlag, 344
Vectis homodromus, II. 775
- - *heterodromus*, ibid.
Ventil, II. 918
Venus, III. 1141. ihre Aehnlichkeit mit dem Monde, 1277. Flecken, 1268. Berge, 1267. Bewegung um die Axe, III. 1269. um die Sonne, 1265. 1284
Venus in Sole, III. 1264
Veränderliche Grösse. Erklärung, IV. 1801. Zeichen, 1802
Verbürste Circul, 471
Verdeckter Weg, II. 637
Verdruckte Circul, 471
Verdünnung der Seulen, 337
Vergrösserungs-Gläser, III. 1029. 1030. 1052. wie viel sie vergrössern, 1050. 1051
Verhältniß, 73. ihre Veränderungen, IV. 1633. 1634. welche in der Bau-Kunst zugebrauchen sey, I. 310. 311
Verhältniß der irrational-Grössen, IV. 1568
Verjüngter Maaß-Stab, 136. 200. 201
Verkleinerungs-Gläser, III. 1030. 1031
Verkehrte Regel Detri, 102
Verkehrter Karnieß, 346
Vertical-Circul, III. 1145
Vertical-Uhren, III. 1527
Vertical-Winckel, 133. III. 1086
Viel-Eck, 125
Vieleckichtes Glas, III. 1057
Viertel des Mondes, III. 1246
Viertel-Feld-Schlange, II. 533. 553. 562

Viertel-Feld-Stück, ibid.
Viertel-Stab. Erklärung, 343. Zeichnung, 344. Grösse, 359
Vindemiatrix, III. 1191
Virgo, III. 1143
Visir-Schuß, II. 563
Visir-Stab, 245. 246
Unbewegliche Feste, 1509. 1510
Undeterminirte Aufgabe, IV. 1743. Exempel dazu, ibid.
Undeutlicher Begriff. Erklärung, 7. wenn man mit ihm zufrieden seyn kann, 8
Unendlich kleine Grösse, IV 1799. 1800
Unförmige Sterne, III. 1192
Ungerade Zahlen, ihre Eigenschaften, IV. 1608. 1609. 1610
Ungleichseitiger Triangel, 124
Unordentliche Figur, 125
Unordentlicher Cörper, 128
Unter-Balcken, 342
Untergang der Sterne, III. 1133. 1200
= = der Sonne, III. 1180
Unsichtbar, warum einige Sachen werden, III. 957
Unsichtbare Finsterniß, III. 1242
Unter-Saum, 344
Unterscheid, 42
Unterschlägiges Wasser-Rad. Erklärung, II. 801. wo es zugebrauchen sey, 812. wie das Wasser darauf zuleiten sey, 819
Unveränderliche Grösse. Erklärung, IV. 1801. Zeichen, 1802
Unvollständiger Begriff, 8
Voll-Erde, III. 1386
Voll-Mond, III. 1246
Vollkommenheit einer Festung, II. 597
= = eines Gebäudes, 307
Vollständiger Begriff, 7
Vorgebürge in dem Monde, III. 1255
Vorgemächer, wie sie beschaffen seyn sollen, 461
Vorstechung, 340

W.

Wände, wie sie in das Perspectiv zubringen seyn, III. 1070
Wärme, wie sie bald in das Zimmer dringt, 488
Wässerige Feuchtigkeit, III. 955
Waffen-Plätze, II. 681
Wage. Erklärung, II. 764 wie sie zumachen, ibid. zuprobiren sey, 765

Register

Wage, III. 1142. 1190
Wahre Bewegung, III. 1314
Wahrer Horizont, II 1131
Wahre Wurtzel, IV. 1718
Wall, seine Nothwendigkeit, II. 606. Höhe, 611. 612. Figur, 613. 614. wie er aufzuführen sey, 716
Wall-Fisch, III. 1190
Wall-Gang, II. 609
Waltze, 126
Wand-Pfeiler, 334
Wand-Seule, ibid.
Wasser, wie es zu der Bewegung der Mühlen gebraucht wird, II. 801
Wasser-Kunst, II. 922. 923
Wasser-Schlange, III. 1190
Wasser-Mann, III. 1142. 1190
Wasser-Schraube, II. 911
Wasser-Stand, II 812
Wasser-Wägen, II. 805. 809
Wasser-Wage, II. 805
Wehr-Bau, II. 821
Wein-Monat, III 1484
Weiten der Oerter, wie sie zumessen seyn, 134. 144. 145. 201. 294. 295. III. 1435. 1460
- - der Planeten von der Erde, 1376. 1345. 1348. von der Sonne, III. 1321. 1347
Weiten der Sterne. Erklärung, III. 1177. wie sie zuobserviren seyn, 1177. 1178. Nutzen, 1180
Weitseulig, 395
Welsche *Practica*, 108
Welt, wie sie aussieht, III. 1126. 1127
Welt-Axe, III. 1129
Welt-Bau, (neue) 1387
Welt-Gebäude, wie es beschaffen sey, III. 1296
Welt-Gegenden, III. 1454, 1455
Welt-Kugel, III. 1127
Welt-Pole, III 1128
Wendel-Treppe. Erklärung, 495. Beschaffenheit, 496. Zeichnung, 497
Wendungs-Punct. Erklärung, IV. 1901. wie er zufinden sey, 1904
Weniger, IV. 1553
Wesentliche Glieder, 351
Wetter-Glas, wie es zumachen sey, II. 897. besondere Phænomena, 899. 900
Widder, III. 1142. 1190
Wiederkehrungs-Punct. Erklärung, IV. 1901. wie er zufinden sey, 1904
Wiederlage der Gewölber, 474
Widerstand in Bewegung der Maschinen, II. 835
Widerstehende Kraft, II. 844

Win-

Winckel. Erklärung, 122. Maaß, ibid. Eigenschaften, 130 131. 153. 154. 157. wie er zumessen, 134. zubeschreiben, 136. auf dem Felde abzustecken sey, 144. Theilung in zween Theile, 164
Winckel in regulären Viel-Ecken, 165. in jedem Viel-Eck, 166
Winckel, welcher allzuspitzig ist, wie er zufortificiren sey, II. 697. welcher einwerts gebogen ist, wie er zufortificiren sey, 698
Winckel an der Peripherie, 157. 158
= = an der Sonne, III. 1314. 1344
Winckel-Hacken, 150. 159
Winckel-Messer, 123
Wind, II. 537
Wind-Mühlen, II. 824. 825
Wind-Raum, II. 535
Wind-Wage. Erklärung, II. 879. wie sie zumachen, 903. und zugebrauchen sey, 904
Winter, III. 1444
Winter-Monat, III. 1484
Wischer, II. 555
Wisch-Kolben, ibid.
Woche, III. 1478
Wolf, III. 1190
Wahlgereimtheit, 313
Würfel, 127
Würfel in der Bau-Kunst. Erklärung, 341. Beschaffenheit, 348. 349. Höhe, 360. Auslaufung, 361
Wulst, 344
Wunderbarer Stern, III. 1388
Wurtzel, ihre Arten, 1591. IV. 1718. Rechnung mit Buchstaben, 1563. wie sie aus jeder Dignität zuziehen seyn, 1602. Ausziehung, I. 86. 91
Wurtzel der Gleichung. Erklärung, IV. 1718. Eigenschaften, 1719. 1720. Veränderung, 1721. Schrancken, 1733. Ausziehung, 1735. wie sie durch Näherung zufinden sey, 1738
Wurtzel-Täflein, 84
Wurtzel-Zeichen, IV. 1565

Y.

Yezdegerdisches Jahr, III. 1487. 1488. wie sein Anfang zufinden sey, 1488

Z.

Zapfen, 386
Zahl. Erklärung, 38. Beschaffenheit, 39. 40. ihre Veränderungen, 40. 41.

wie sie ausgesprochen wird, 47. 48
Zahl der Winckel in der polygonal-Zahl, IV. 1625
Zapfen-Stücke, II. 542. 543
Zauber-Laterne, III. 1054
Zehen-Eck, wie seine Seite zufinden sey, IV. 1652. 1653
Zehlen, was es heisse, 38
Zehler eines Bruchs, 77
Zelt-Dach, 500
Zeichen der Zahlen, 47
- - der Zeit, III. 1493. 1494
Zeichnen, wie solches genau geschehen kann III 1078
Zeichnung der Figuren, 142. was sie nutzt, 143
Zeiger, die Mittags Höhen zufinden, III. 1150
Zeit, wie man sie aus der Höhe der Sonne, 1171. und der Sterne findet, 1220. 1222. 1223
Zenith, III. 1129
Zeugmeisterey-Kunst, II 517
Zerstreuungs-Punct, III. 1028
Ziegel, wie sie zustreichen, 324. zuprobiren seyn, 327
Ziegel-Erde, 327
Zieh-Panster, II 819
Zieh-Pengel, II. 796
Ziffern, 47
Zimmer, ihre Figur, 458. Verhältniß der Länge zu der Breite, 459. Höhe, 459. 460. wie sie anzulegen seyn, 478. 479
Zierrathen des Gebäudes. Erklärung, 308. wie viel sie nöthig sind, 309. 310
Zirckel, 121
Zodiacus, III. 1144
Zoll. Erklärung, 119. Zeichen, 122
Zonæ frigidæ, III. 1443
- - *temperatæ*, III. ibid.
Zona torrida, III ibid.
Zünd-Loch in dem Stücke, II. 547
Zünd-Röhre in der Bombe, II. 570
Zusammendrücken, II. 878
Zusammenkunft, III. 1394
Zusätze. Erklärung. 28. Unterscheid, 28. 29
Zwerg-Axe, IV. 1698
Zwey mitlere proportional Linien, wie sie zufinden seyn, IV. 1774
Zwillinge, III. 1142. 1190
Zwischen-Tiefe, 354. 396

ENDE
des Registers.

Bericht an den Buchbinder.

Die Kupfer müssen zu Ende einer jeden Disciplin dergestalt gebunden werden, daß man sie ganz heraus schlagen kann.

Nemlich in dem ersten Theile.

Pag. 256.	Fig. *Geom. Tab. I.* bis *XXIV.*
300.	*Trigon. Tab. I.* bis *IV.*
510.	*Archit. Tab. I.* bis *XXX.*

In dem andern Theile.

Pag. 592.	Fig. *Artiller. Tab. I.* bis *VII.*
740.	*Archit. mil. Tab. I.* bis *XIII.*
838.	*Mechan. Tab. I.* bis *VI.*
872.	*Hydrostat. Tab.*
906.	*Aërometr. Tab.*
942.	*Hydraul. Tab. I.* bis *III.*

In dem dritten Theile.

Pag. 988.	Fig. *Optic. Tab.*
1013.	*Catoptr. Tab.*
1064.	*Dioptr. Tab. I. II*
1078.	*Perspect. Tab. I. II. III.*
1120.	*Trig. Sphar. Tab.*
1426.	*Astron. Tab. I.* bis *VIII.*
1464.	*Geogr. Tab. I.*
1542.	*Gnomon. Tab I. II. III.*

In dem vierten Theile.

Pag. 1934.	Fig. *Algebr. Tab. I.* bis *XI.*

